ATLANTE
Cuadernos de Educación y Desarrollo
(2ª Época)

Marzo 2020 - ISSN: 1989-4155

PARA QUÉ ENSEÑO MATEMÁTICA

Lic. Armando Acosta Cantillo[1]

Lic. Niurka Fiel Correa

Lic Euler Acosta Ramos

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Armando Acosta Cantillo, Niurka Fiel Correa y Euler Acosta Ramos (2020): "Para qué enseño matemática", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (marzo 2020). En línea:

https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/03/enseno-matematica.html
http://hdl.handle.net/20.500.11763/atlante2003enseno-matematica

Resumen

La esencia de este artículo, aunque indirectamente, es que los docentes dedicados a la enseñanza de las matemáticas lleguemos a cuestionar nuestro desempeño y mantengamos activa, como parte del método con que enseñamos, la interrogante básica: ¿Estamos contribuyendo al desarrollo de la mente, a formar y desarrollar habilidades, incluso a crear valores y sabiduría?, ¿Cuántos de los que enseñan matemáticas se harán esta pregunta?, ¿cuántas veces?

La respuesta sincera que cada profesor dé a la pregunta, ¿para qué enseño matemática? es la clave del modo de enseñar, y en consecuencia del modo de aprender.

El desarrollo de este texto lo haré a través del análisis de situaciones problémicas (ejercicios muchos ya conocidos) representativas, me parece el modo más efectivo, además no sabría hacerlo de otra manera. Como es lógico entre los criterios para la exposición de los procedimientos subyacen las líneas directrices para la enseñanza de las matemáticas, los conceptos teóricos básicos, los principios didácticos y el reconocimiento de los fundamentos teóricos cognoscitivos más generales.

El texto no es, necesariamente, un libro de metodología para la enseñanza de las matemáticas, ni presume ser recetario para nadie, es sencillamente un corto compendio de consideraciones que comparte un profesor que durante más de cuatro décadas ha intentado enseñan matemáticas.

---

1. Lic. Armando Acosta Cantillo, Máster en Ciencias de la Educación. Profesor Asistente. Actual profesor de asignaturas matemáticas, del Centro Universitario Municipal. Baracoa Oriente, Cuba.
2. Lic. Niurka Fiel Correa, Máster en Ciencias de la Educación. Profesora Asistente. Actual profesor de asignaturas de la carrera Contabilidad y Finanzas, del Centro Universitario Municipal. Baracoa Oriente, Cuba.
3. Lic. Euler Acosta Ramos, Máster en Ciencias de la Educación. Profesor Asistente. Actual profesor del Centro Universitario Municipal, Baracoa Oriente, Cuba.

Es comprensible que solo abarque una parte de los contenidos que se desarrollan en el nivel medio, pero serán suficientes por la extensibilidad de los procedimientos y el propósito de exhortación a la búsqueda por cada profesor conforme a su contexto.
Palabras claves: Enseñanza de las matemáticas, Aprendizaje de las matemáticas, Las matemáticas en función del desarrollo intelectivo, Centro Universitario Baracoa.

Summary

The essence of this article, although indirectly, he is that the educational dedicated to the teaching of the mathematics we arrive come to ask our acting and we maintain active, like part of the method with that we taught, the basic query: Do we be contributing to the development of the mind, to form and develop abilities, included to create security and wisdom?, how many they of those that teach mathematics will become this question?, how many times?

The sincere answer that each professor gives to the question, why do I teach mathematical? it is the key of the manner of teaching, and in consequence of the manner of learning.

The development of this text will make problémicas through the analysis of situations (exercises many already well-known) representative, he is seem me the most effective manner, I would not know how to also make it of another manner. Like it is logician between the criterions for the exposition of the procedures subyacen the lines directrices for the teaching of the mathematics, the theoretical basic concepts, the beginnings didácticos and the reconnaissance of the theoretical cognitive foundations more generals.

The text is not, necessarily, a book of methodology for the teaching of the mathematics, neither it presume be recetario for nobody, it is easily a short summary of considerations that shares a professor that during more than four decades have attempted teach mathematics.

Is comprehensible that only he undertake a part of the contents that they develop in the half level, but they will be enough for the extensibilidad of the procedures and the purpose of exhortation to the search for each professor according to their context.

words nail: Teaching of the mathematics, Learning of the mathematics, The mathematics in function of the development intellective, Center university student Baracoa.

¿Para qué *enseño* matemática?

Introducción

Aún está por decidir si las matemáticas forman una realidad abstracta fuera de la mente del hombre (el platonismo), o si es un lenguaje que el propio hombre ha creado para cuantificar, buscar nexos y relacionar los objetos del mundo real. Para ambos casos nuestra intención es compatible, para el primero el humano debe desarrollar la mente para poder descubrir las asombrosas relaciones que existen en las matemáticas, y para el segundo, solo el desarrollo del intelecto podría crear esa maravillosa arquitectura configurada con las formas y contenidos matemáticos.

La esencia de este "manual", aunque indirectamente, es que los docentes dedicados a la enseñanza de las matemáticas lleguemos a cuestionar nuestro desempeño y mantengamos activa, como parte del método con que enseñamos, la interrogante básica: ¿Estamos contribuyendo al desarrollo de la mente, a formar y desarrollar habilidades, incluso a crear valores y sabiduría?, ¿Cuántos de los que enseñan matemáticas se harán esta pregunta?, ¿cuántas veces? Con un mínimo de riesgo, dado que por más de 40 años desarrollo y "controlo" el proceso de enseñanza[2] de las matemáticas, puedo contestar, al menos por ahora, que pocos profesores de matemáticas se hacen esta indispensable interrogante, y los que nos la hacemos no hemos logrado que sea parte de nuestra conducta, que sea concomitante a nuestros métodos para enseñar.

Por ahora tenemos algunas "razones" que nos justifican, pero son razones parásitas al proceso de enseñar, son justificaciones que presentamos a nuestra conciencia cuando ésta nos exige. Ya en un texto *(Enseñe y evalúe en función del buen aprendizaje 2013*) abordé el componente evaluación como fuerte influyente (tanto negativo como positivo) en la eficiencia para el acto de enseñar. La respuesta sincera que cada profesor dé a la pregunta, ¿para qué enseño matemática? es la clave del modo de enseñar, y en consecuencia del modo de aprender.

Enseñar matemáticas con el solo propósito de que los alumnos al final de un período de tiempo determinado sean capaces de contestar con éxito un cuestionario es un desperdicio, es botar la mejor pulpa de la fruta. Aquí *contestar con éxito* no significa aprender con éxito. Pero de cualquier manera, ¿los alumnos no deben ser evaluados?, sí deben ser evaluados y el examen escrito es muy adecuado para evaluar el aprendizaje de las matemáticas, esta ciencia se manifiesta en objetos abstractos y sus relaciones. Los caracteres matemáticos que el propio hombre ha ido creando y canonizando se plasman en el papel perfectamente, sin perder significado, es decir, queda plasmado lo matemático pensado por cada alumno examinado.

¿Dónde está lo incomprendido que impide rebasar esta actitud, que consiste en enseñar solo para reproducir con éxito? Creo que es sencillo entenderlo, relegando los docentes perezosos, que no son pocos, la mayoría cree que enseñando de otra manera el tiempo le sería insuficiente para lograr el objetivo ya mencionado, incluyendo los que están convencidos de que los enseñantes no son capaces de aprender de manera desarrolladora.

Sin embargo sería un logro convencernos de que al enseñar matemática de manera desarrolladora estamos asegurando, a la vez las dos cosas: un aprendizaje desarrollador y éxito en el examen escrito. Eso lo tengo demostrado, una y otra vez. Y dado que el aprendizaje forma parte de una ciencia factual, confío en los hechos e incorporo los resultados a mis convicciones.

Si decimos a los estudiantes: "En un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 60°, el lado que se opone al ángulo de 30° es la mitad de la hipotenusa"; estúdiense bien esa relación porque la aplicaremos en varios ejercicios. Si solo llegamos a esta información, más adelante veremos cuántas relaciones útiles para solucionar varios problemas se dejan de enseñan al no justificar (no necesariamente demostrar) un sencillo teorema matemático. O sea no se pierde, se gana tiempo, y se añade mucho a la cognición del estudiante.

---

[2] No utilizo enseñanza-aprendizaje, para mi propósito me basta enseñanza. En definitiva *alguien* enseña si otro *alguien* aprende.

El desarrollo de este “manual” lo haré a través del análisis de situaciones problémicas (ejercicios muchos ya conocidos) representativas, me parece el modo más efectivo, además no sabría hacerlo de otra manera. Como es lógico entre los criterios para la exposición de los ejercicios subyacen las líneas directrices para la enseñanza de las matemáticas, los conceptos teóricos básicos, los principios didácticos y el reconocimiento de los fundamentos teóricos cognoscitivos más generales.
El texto no es, necesariamente, un libro de metodología para la enseñanza de las matemáticas, ni presume ser recetario para nadie, es sencillamente un corto compendio de consideraciones que comparte un profesor que durante más de cuatro décadas ha intentado enseñan matemáticas.
Es comprensible que solo abarque una parte de los contenidos que se desarrollan en este nivel, pero serán suficientes por la extensibilidad de los procedimientos y el propósito de exhortación a la búsqueda por cada profesor conforme a su contexto.

Ecuaciones e inecuaciones.

Ecuaciones

Lo primero que debemos asegurar, como punto de partida, es un concepto para el objeto designado con la palabra *ecuación,* es decir que tengamos la representación mental de dicho objeto, sus rasgos esenciales, de tal manera que al escuchar la palabra o al recordarla nos llegue a la mente su estructura (los caracteres y su relación).

Un segundo nivel, ya no tan fácil, es la descripción verbal de este concepto (la definición)[3]. Nunca está demás, al contrario es necesario describir los conceptos, no solamente contribuye a fijar los contenidos matemáticos, pasan a formar parte del esquema referencial del profesor y de los alumnos, los utilizamos para describir e interpretar objetos y relaciones de la realidad contextual.

Como este texto va dirigido a los docentes de enseñanza media y en particular a los del nivel preuniversitario, debemos presumir que solo corresponde reactivar: términos, transposición de términos, reducción, reglas de los signos, las operaciones algebraicas básicas y las propiedades de las expresiones racionales e irracionales.

Empecemos a partir de la ecuación cuadrática. Nos basta con su definición formal

[3] No he presumido una definición de *definición*. El docente debe estudiar los conceptos y sus definiciones, como es lógico tal tratado no requiere abordarse aquí.

I. $ax^2+bx+c=0$, siendo a, b y c números reales, $a \neq 0$

Una vía para su tratamiento, puede ser más o menos inductiva como lo hacen algunos textos. (Otros lo hacen en sentido contrario). Tal vez al enseñar matemática lo estamos haciendo desde una perspectiva demasiado deductiva, que es menos compatible con la naturaleza inductiva del aprendizaje natural.

1º Para b=c=0, nos queda una ecuación de fácil solución $ax^2=0$ con solución x=0.

¿Cómo se justifica esta solución? Y es bueno que se cuestione y se comente. Una respuesta sencilla: si el producto de dos expresiones o números es cero y está asegurado que uno de ellos es distinto de cero, entonces el otro lo es. Concluimos que todas las ecuaciones cuadráticas de esta forma tienen solución x=0. Lo que hasta aquí hemos hecho parece una verdad tan elemental que no valdría la pena, pero sí vale la pena.

2º Para c=0 y $b \neq 0$, resulta $ax^2+bx=0$, esta ecuación nunca presenta dificultad al resolverla. Con la colaboración de los alumnos se resuelven ejemplos variados.

3º Para b=0 y $c \neq 0$, $ax^2+c=0$, tampoco presenta dificultades, advirtiendo según el dominio numérico en que estemos trabajando, si solo hemos llegado hasta los reales entonces la solución exige, $-\frac{c}{a} > 0$. A continuación corresponde resolver ejemplos variados

4º Para a=1, resulta $x^2+bx+c=0$, haríamos varios ejemplos con trinomios que se puedan descomponer en factores.

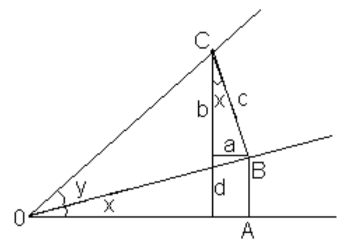
5º $ax^2+bx+c=0$, aquí también empezaríamos por varios ejemplos con trinomios que se puedan descomponer en factores. Luego presentaríamos una ecuación como la siguiente $2x^2-12x+7=0$, los intentos de factorar nos convencen de lo difícil de encontrar la combinación que satisfaga. La pregunta sería cómo transformar el miembro izquierdo de la ecuación, de tal manera que pueda aislarse o despejarse la variable. Tal ocurrencia es difícil que pueda salir de un estudiante, de cualquier manera la interrogante tiene que aparecer en el proceso de búsqueda. El profesor propone la posibilidad con el uso del *complemento cuadrático,* con lo cual tiene que reactivar este concepto a través de dos o tres ejemplos. Luego tomar el propuesto en la ecuación.

$2(x^2-6x+9)-11=2(x-3)^2-11$, de modo que $2(x-3)^2-11=0$, ya aquí se puede despejar la x

$x = \pm\sqrt{\frac{11}{2}} + 3$ $x_1=5,345$ $x_2=0.655$

Nos resta valorar los pasos que haríamos para cada ecuación con estas exigencias, y en consecuencia, la conveniencia de buscar un algoritmo más general, lo cual nos sugiere intentar la estructura anterior a partir de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.
Ahora sigue desarrollar todos los pasos necesarios, con la participación de los alumnos, no importa el tiempo empleado, se aprende mucho, este procedimiento es como la demostración de un teorema, incluso no estaría mal si alguien lo trata como teorema.
Una vez lograda la fórmula, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se hace el estudio de su estructura. Es importante advertir como $a \neq 0$ es condición indispensable para la relación obtenida.
Si estamos en el dominio de los reales entonces establecemos las condiciones para el radicando contenido en la expresión: b^2-4ac (las tres posibilidades que conocemos). A partir de aquí el profesor redacta y selecciona todos los ejercicios simples y combinados que él entienda necesario para fijar este contenido.
Es claro que al terminar de impartir este contenido, y de esta manera, no debemos esperar que los alumnos estén en condiciones de reproducir o deducir por sí mismos la fórmula para la solución de ecuaciones cuadráticas, debe bastarnos, por ahora, irles creando la inquietud por saber de dónde salen las cosas.

Las ecuaciones de tercer grado[4], las fraccionarias, las que contienen radicales, las exponenciales y las logarítmicas; las iremos tratando más o menos integradas. En los textos aparecen bien tratadas y no presentan dificultades.



II. Ecuaciones trigonométricas. Ecuaciones integradas.

Se deben asegurar como premisa algunos contenidos (conocimientos y habilidades) básicos sin los cuales no es posible tener éxito en la resolución de ecuaciones trigonométricas:

- Identidades básicas
- Fórmulas de reducción
- Signos de las razones por cuadrante
- Manejo de las tablas

Para las ecuaciones integradas, se reactivan, en el momento oportuno, las propiedades con potencias, expresiones con radicales y los logaritmos.

Sería provechoso que no solo se informara un listado de identidades básicas, aunque sean las más elementales se podrían demostrar, digamos $sen^2x+cos^2x=1$ (una ilustración sencilla haciendo uso del triángulo rectángulo) sen(x+y)=senxcosy+cosxseny, cos(x+y)=cosxcosy-senxsenx; de estas tres últimas se deducen identidades para

sen(x-y), cos(x-y), sen2x, cos2x, $sen\frac{x}{2}$, $cos\frac{x}{2}$ y otras varias.

En los textos aparecen propuestas, algunas un poco trabajosas, presento la más sencilla que he visto, como mínimo al profesor debía interesarle, y si el contexto lo permite también podría presentarse en el aula.

En la figura, desde el punto C se trazaron perpendiculares hasta OB y OA por lo que el triángulo rectángulo de lados a, b y c es semejante al triángulo AOB (dos ángulos son iguales si tienen su lados respectivamente perpendiculares)

sen(x+y)=$\frac{b+d}{OC}=\frac{b}{OC}+\frac{d}{OC}$; como muestra la figura, las razones que formar esos dos sumandos del miembro derecho no son razones trigonométricas, pero podemos lograrlas y mantener la igualdad eligiendo el lado adecuado en alguno de los triángulos que se forman en la figura

sen(x+y)=$\frac{d+b}{OC}=\frac{d}{OC}+\frac{b}{OC}=\frac{d}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{OC}=senxcosy+cosxseny$; Téngase en cuenta que AB=d (lados opuestos de un rectángulo). De forma análoga

cos(x+y)=$\frac{OA-a}{OC}=\frac{OA}{OC}-\frac{a}{OC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}-\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{OC}=cosxcosy-senxseny$

Vamos a presumir que ya hemos avanzado en el aprendizaje de resolución de ecuaciones, por tanto solo reflejaré donde, a mi juicio, se estanca el aprendizaje y en consecuencia se anquilosan profesores[5] y alumnos.

Ejemplo 1

Halla el conjunto solución de la ecuación $log(4-cos^2x-6cosxtanx)=1$ en el intervalo $[0;2\pi]$.

Se trata de una expresión logarítmica que exige argumento positivo, pero no es recomendable comenzar de esta manera, porque en definitiva sería una inecuación trigonométrica que no se trata aquí, por tanto nos basta determinar la solución y verificar si no indefine la expresión.

[4] Las particulares que se estudian en este nivel

[5] ¿Cómo se explica que hace treinta años muchos profesores de matemática tenían más habilidades que en el tiempo actual?, la respuesta es sencilla, se han desempeñado como repetidores pasivos de fórmulas y algoritmos predeterminados.

De la observación previa, se pasa de inmediato de estructura logarítmica a ecuación trigonométrica 4-cos^{2}x-6cosxtanx=10, aquí ¡**hay que detenerse!** Y lo destaco porque el hábito de aplicar algoritmo sin detenerse está haciendo mucho daño al desarrollo del razonamiento tanto a profesores como a estudiantes. Se está escribiendo demasiado, lo innecesario, el desarrollo de la mente está dependiendo mucho del uso de lápiz.

¿Qué debemos advertir al observar la ecuación?

-[*La tanx se expresa como* $\frac{senx}{cosx}$*, y se simplifica cosx]* (a partir de aquí pondré cursiva entre corchetes para indicar que ¡**se piensa!**, no se escribe en ninguna parte, claro no se prohíbe escribir)

- [Como del razonamiento anterior me queda el seno lineal, entonces ya podemos expresar de una vez…] 4-(1-sen^{2}x)-6cosx·$\frac{senx}{cosx}$*=10; Podemos también [sustituir 4-cos^{2}x por*

3+1-cos^{2}x…y escribir…] 3+sen^{2}x-6cosx·$\frac{senx}{cosx}$*=10, que resulta más simple.*

¿Qué sigue ahora? Ya sé que para muchos sería demasiado pedir que se exprese ya la ecuación cuadrática organizada, pero no es demasiado, sencillamente no estamos acostumbrados a rebasar pasos algorítmicos escritos y rutinarios, que al inicio son indispensables pero requieren ser rebasados, claro en forma escrita porque el proceso mental se mantiene, precisamente gracias a este conocimiento interiorizado podemos simplificar las expresiones escritas, esto tiene muchas ventajas, entre otras: se evita tener que escribir tantos caracteres y tantas veces, lo cual aumenta la probabilidad de equivocarse, es más agotador y en nada contribuye al desarrollo mental. Conozco buenos alumnos que han demorado más de 4 horas en hacer un examen normal de 5 preguntas, por el solo hecho de su modo tan agotador de trabajar.

Ahora observando la estructura, y sabiendo a donde queremos llegar, expresamos la estructura cuadrática: sen^{2}x-6senx-7=0 que al factorar resulta, (senx-7)(senx+1)=0

senx=7> 1 ∴ nts; senx=-1 $\therefore x = 270^0$; como este valor indefine a la tan, entonces concluimos que la solución es nula, para lo cual utilizamos la letra griega $\emptyset$ (phi) o { }.

Ejemplo 2

$Resuelve:\ \ 0.4^{lg^2_{0,5}senx+1} = 6.25^{2-lg_{0,5}sen^3 x}$

Esta estructura nos indica que debemos asegurar la aplicación de la equivalencia básica

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \leftrightarrow f(x) = g(x),\ a \neq 0;\ |a| \neq 1$

Ahora, ¿qué base común se nos ocurre? Ensayamos: 0,4=$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; nos toca intentar con 6,25 que expresado en forma de fracción es $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$; luego hacemos uso de la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$; con lo cual podemos aplicar la equivalencia básica.

$\left(\frac{2}{5}\right)^{lg^2_{0,5}senx+1}$ =$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-lg_{0,5}sen^3x)}$*; que equivale a:* $lg^2_{0,5}senx + 1 = -2(2 - lg_{0,5}sen^3x)$

Toca ¡**detenerse!** e identificar que la estructura corresponde a una ecuación cuadrática de variable $lgsenx$, advertir que $log^n_a k = (log_k)$^{n}, y seguidamente plantear la ecuación organizada, no se requiere escribir ninguna otra estructura antes que la cuadrática organizada, precisando que "*no se requiere"* no debe interpretarse como *no está permitido.* Cada alumno lo hace a su alcance, pero lo que no debe eludirse es la exigencia del profesor, porque, ¿dónde quedan los alumnos que sí pueden llegar? Y está siendo muy deplorable la poca atención que están recibiendo estos alumnos que *sí pueden llegar.* Hasta los profesores pierden habilidades del modo que se está enseñando la matemática. ¿A dónde llegamos? repetidores formales de algoritmos prefijados.

$lg_{0,5}^2 senx - 6lg_{0,5}senx + 5 = 0$; *que al factorar se tiene*

$(lg_{0,5}senx - 1)((lg_{0,5}senx - 5) = 0$, *de donde* $lg_{0,5}senx = 1$; $lg_{0,5}senx = 5$

Senx=$\frac{1}{2} \therefore x = \begin{cases} 30° + k360 \\ 150° + k360 \end{cases}$; $k\epsilon Z$ *senx*=$\frac{1}{32} \therefore x = \begin{cases} 1,8° + k360° \\ 178,2° + k360 \end{cases}$; $k\epsilon Z$

Para cualquier valor de la solución obtenida senx>0, entonces concluimos que todos los valores satisfacen a la ecuación.

Ejemplo 3
Determine en qué puntos del plano coordenado el gráfico de f(x)=2$log_{25}(5^{2senx} - 4)$ interseca al gráfico de la función g(x)=2senx+sen$\frac{3\pi}{2}$; para 0<x<π
Por el enunciado del ejercicio corresponde plantear la ecuación f(x)= g(x)
*2*$log_{25}(5^{2senx} - 4)$ *=2senx+sen*$\frac{3\pi}{2}$
Dado que el miembro derecho no contiene *log,* nos sugiere que sería conveniente modificar la ecuación hasta aplicar la equivalencia $log_a k = c \leftrightarrow k = a^c$
Nos **detenemos** y [advertimos que podemos aplicar la propiedad básica $log_{a^r} k = \frac{1}{r} log_a k$; *que nos permite la reducción deseada, y llegar a la expresión]*
$log_5(5^{2senx} - 4) = 2senx - 1$; *que al aplicar la equivalencia , se obtiene*
$5^{2senx} - 4 = 5^{2senx-1} = \frac{1}{5} \cdot 5^{2senx}$; al detenernos advertimos que en ambos miembros de la ecuación los términos exponenciales son semejantes y se pueden reducir, de este modo $\frac{4}{5} \cdot 5^{2senx} = 4$, que conduce a $5^{2senx} = 5$, o sea, senx=$\frac{1}{2} \therefore x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; que al evaluar en f, o en g, se obtienen los puntos del plano comunes para ambos gráficos en el dominio indicado: $P_1(\frac{\pi}{6}; 0)$ y $P_2(\frac{5\pi}{6}; 0)$

III. Ecuación modular

La premisa que debe asegurarse, $|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$; esta definición condiciona el método para resolver ecuaciones modulares.

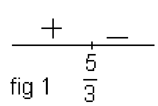


fig 1

La solución de la ecuación |x-2|=3 exige tener presente los sinos de x-2.
1º para x≥ 2 resulta la ecuación x-2=3; x=5
2º para x< 2 resulta le ecuación –x+2=3; x=-1

Ejemplo 1. Resuelve $\frac{x}{|5-3x|} = 0,5$, *signos de 5-3x. fig. 1*

1º para x$< \frac{5}{3}$, *la ecuación* $\frac{x}{5-3x} = 0,5$ *tiene solución x=1*

2º para x$> \frac{5}{3}$, *la ecuación* $\frac{x}{3x-5} = 0,5$ *tiene solución x=5*

Ejemplo 2. $x^2 + 3|x| + 2 = 0$

Esta ecuación es evidentemente de solución nula, pues al sumar dos expresiones no negativas al número 2, no puede resultar cero.

Si deseamos verificar, entonces:

1º para x ≥ 0, la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ se anula para -1 y -2, pero estos resultados son incompatibles con la condición x ≥ 0.

2º para x< 0, la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se anula para 1 y 2, pero estos resultados son incompatibles con la condición x < 0.

Ejemplo 3. Resuelve $\sqrt{5^x - 9}$=$\frac{36}{\sqrt{5^x-9}} + \sqrt{5^x}$

Es una ecuación fácil, pero quiero aprovechar para evidenciar que la aplicación de propiedades nos ahorra cálculos innecesarios.
Es claro que elevar ambos miembros al cuadrado nos conduce a una estructura complicada, por eso multiplicamos por el denominador, para obtener $5^x - 9 = 36 + \sqrt{5^{2x} - 9 \cdot 5^x}$ que conduce a

$5^x - 45 = \sqrt{5^{2x} - 9 \cdot 5^x}$; ahora elevamos al cuadrado, pero con un poco de pereza no calculamos 45^2, de tal modo resulta $5^{2x} - 90 \cdot 5^x +$ 45^2=$5^{2x} - 9 \cdot 5^x$ que al simplificar se llega 45^2=$81 \cdot 5^x$de donde $5^x = \left(\frac{45}{9}\right)^2$, o sea x=2

Si tomamos lápiz y papel o tiza y pizarra, y empezamos a aplicar formalmente un logaritmo aprendido, quizás tendríamos que lidiar con 45^2=2012 y luego dividir por 81.
Evidencié con un ejemplo sencillo, los he visto de cálculos trabajosos, pero evitables si aplicamos propiedades básicas.
A propósito de esta ecuación, x=2 no satisface, ¿Podía preverse que no tenía solución? Sí se podía prever, comente por qué.

Inecuaciones
Partimos del concepto y su descripción, seguido de la presentación y análisis de ejemplos que permitan interiorizar el procedimiento, luego continuamos la resolución de inecuaciones hasta el nivel de profundidad requerido.
Los ejemplos que ilustro nos ayudan a evitar los errores más frecuentes que se cometen al resolver una inecuación.

Ejemplo1.
Determina los valores reales de x que satisfacen la inecuación x(2x-1)(x+3)^2≤ 0
Tenemos 3 factores básicos, pero uno de ellos es base de potencia 2 (potencia par) por tanto este factor no altera los signos de la expresión (miembro izquierdo), y en consecuencia no requiere ubicar su cero en el rayo numérico que utilizamos para determinar los signos. (Si se ubicara no estaría mal, pero nada aporta y tal vez confunda más)
Según el sentido de la desigualdad resulta la solución gráfica, fig.1
Pero como la desigualdad no es estricta, para x=-3 también queda satisfecha. Solución definitiva. x $\in R: 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; x=-3

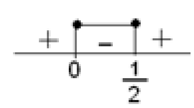


fig. 1

Ejemplo 2. Resuelve $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x} > -1$

Con mucha frecuencia se multiplica la inecuación por x(x+2) lo que no estaría mal si analizaran los signos de esta última expresión y resolvieran para cada intervalo según los signos. Pero sería bastante trabajoso y más para inecuaciones complejas. Por tanto podemos continuar prefiriendo el uso del rayo numérico, para lo cual transponemos el -1 al miembro izquierdo y efectuamos la suma algebraica, que al reducir resulta:

$\frac{2x^2+3x+2}{x(x+2)} > 0$; Obsérvese que el numerador es un trinomio positivo para cualquier valor real de x. La solución gráfica la muestra la fig. 2: x<-2; x >0

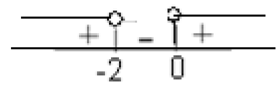


fig. 2

Ejemplo 3. $\frac{(16-x^2)(x^2+0.5)}{2^x} \geq 0$

Es una inecuación muy fácil de resolver, pues un solo factor decide los signos del miembro izquierdo. Esta inecuación es equivalente a $(16-x^2) \geq 0$ de solución $-4 \leq x \leq 4$; observe que la gráfica fig. 3 comienza con signo negativo a la derecha del último cero, ya que en (4-x)(4+x) el coeficiente de la x aparece una vez negativo. Y en general *siempre que aparezca un número impar de veces la variable lineal con coeficiente negativo el signo a la derecha del último cero es negativo.*

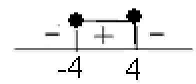


fig. 3

Ejemplo. La expresión $\frac{(1-x)(3-2x)}{(5-x)(5+x)}$ tiene signos según indica la fig. 4

Ejemplo 4

Determina para qué valores reales de x es válida la relación $\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{-x^2+x-1}} \geq 0$

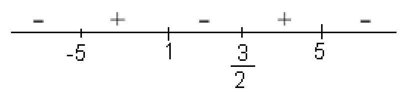
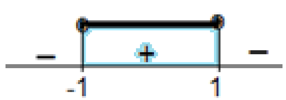


fig. 4

De la observación se deduce que se requiere hacer muy poco para dar solución a este ejercicio. Dado que para cualquier valor de x el denominador es siempre negativo, solo basta analizar los signos del numerador, y presentarlos en el rayo numérico, lógicamente afectados por el signo negativo del denominador. Sol: -1$\leq x \leq 1$



Resolución de problemas con texto.

La resolución de problemas con texto exige un tipo particular de heurística, tiene la ventaja de problematizar nuestra realidad de un modo particular, de involucrar variables sensibles a nuestros intereses afectivos. Exige desarrollar habilidades para expresar el lenguaje de la prosa en un lenguaje formal, se aprende a utilizar letras con una semántica propia conforme a la situación problémica, se crean habilidades para relacionar estas letras, ya como representativas de valores (variables), en la búsqueda de un modelo matemático que nos permita dar solución al problema.

De modo que la exigencia intelectiva para la resolución de problemas con texto contiene un **productivo** proceso heurístico. Opino que los pocos resultados que se logran en el desarrollo de habilidades para resolver problemas están precisamente en no identificar su carácter *productivo*.

Siempre será posible comenzar con una situación problémica sencilla y familiar. Preguntamos al alumno Héctor cuántos años tiene tu papá y cuántos tienes tú (claro estamos seguro de que Héctor tiene su padre vivo y ambos se relacionan bien, de lo contrario el intento sería desacertado). Héctor nos contesta, *mi padre Antonio tiene 42 años y yo tengo 15.* Con una sola pregunta tenemos creada la situación problémica buscada: ¿Dentro de cuántos años la edad de Antonio duplica a la edad de Héctor? Si algún alumno hace sus cálculos mentales y nos contesta correctamente, entonces aceptamos la respuesta aun cuando no sea nuestra intención. De los alumnos, en términos cognoscitivos, nada se rechaza (los errores se utilizan para sacarles provecho).

Comenzamos todos (alumnos y profesor) a reflexionar, debemos llegar a convencernos, a partir de la pregunta "*dentro de cuantos años",* de que efectivamente ese hecho solo se producirá en el futuro. De modo que podemos expresar: Sea t, el tiempo en años que debe transcurrir para que la edad de Antonio duplique a la de Héctor. Ahora, ¿Cómo representamos esas edades “dentro de t tiempo”, pues: 15+t sería la edad de Héctor y 42+t, la de su papá.

Ahora el planteo o modelo matemático resulta sencillo, volvemos a leer el texto de la situación problémica, ¿*Dentro de cuántos años la <u>edad de Antonio duplica a la edad de Héctor?</u>* La parte subrayada define al modelo: 42+t=2(15+t), que al resolver, resulta t=12. Se pueden hacer otras preguntas, ¿Qué edad tendrá cada uno? Si estamos en 2018, ¿En qué año será tal suceso?

Ejemplo 1[6]
En un centro de estudio fue seleccionado un grupo de 50 alumnos para presentar trabajo en un evento. Se realizaron trabajos en las asignaturas Matemática, Química y Biología. La razón entre la cantidad de alumnos que realizaron trabajo en las asignaturas Química y Biología es dos tercios. El duplo de los alumnos que realizaron trabajo en Química disminuido en 5, representa el 60% de los alumnos que realizaron trabajo en Matemática. Determina cuántos alumnos realizaron trabajos en la asignatura Matemática.

Ya sabemos que debemos leer el texto y parte de este, una y otra vez, hasta decidir qué aspectos del problema representamos con letras. Este momento es importante y requiere de designar con precisión, en lo particular solo uso las variables *x, y z* cuando sea indispensable, me parece heurísticamente cómodo usar una letra que me mantenga familiarizado con lo que ella representa. En consecuencia:

Sean: m, cantidad de alumnos que participaron por Matemática
q, cantidad de alumnos que participaron por Química
b, cantidad de alumnos que participaron por Biología
Corresponde leer de nuevo, esta vez puede ser parcial e ir formando las ecuaciones y el modelo a la vez:

$$\begin{cases} \mathrm{m+q+b=50\ (ecuación\ con\ total\ de\ alumnos)} \\ \dfrac{q}{b}=\dfrac{2}{3}\ (relación\ entre\ cantidad\ de\ alumnos\ Q\ y\ B \\ \mathrm{2q-5=0.6m\ (relación\ entre\ cantidad\ de\ alumnos\ Q\ y\ M} \end{cases}$$

Toca ahora detenerse y observar qué conviene hacer, reconocemos que se trata de un sistema de 3 con 3, pero no se trata de resolver sistema formal vacío de contenido, es representativo y tiene exigencia particular, “*cuántos alumnos realizaron trabajos en la asignatura Matemática”.* De modo que las variables b y q no requieren ser conocidas y no las calcularé, salvo que me faciliten encontrar al valor de m.

La segunda ecuación la expreso 2b=3q de donde b=$\frac{3}{2}q$, que al sustituir en la primera resulta, m+ $\frac{5}{2}q$=50,

ahora formamos el sistema con la tercera $\begin{cases} \mathrm{m}+\frac{5}{2}q=50 \\ -\frac{3}{5}\mathrm{m}+2\mathrm{q}=5 \end{cases}$

Y al multiplicar la primera por 4/5 resulta $\begin{cases} \frac{4}{5}\mathrm{m}+2q=40 \\ -\frac{3}{5}\mathrm{m}+2\mathrm{q}=5 \end{cases}$ ahora basta con restar[7] la segunda ecuación a

la primera, se obtiene $\frac{7}{5}m=35$, de donde m=25

De tal manera no se requiere llenar una cuartilla, como he visto, con tanta frecuencia, para resolver un problema como este. Observe que al prescindir de las explicaciones-orientaciones, el espacio ocupado es mínimo.

---

[6] Varios ejemplos son conocidos, otros, redactados para el texto. Lo que me interesa más es el procedimiento.
[7] Es muy desventajoso exigir que siempre se multiplique por “-1”, solo se debe hacer en casos necesarios.

Ejemplo no.2

Se dispone de un terreno de 52,8 km^2 para la siembra de árboles frutales. Durante los tres primeros días de la semana se sembraron 3,5 km^2 de mango, más un quinto del plan para este árbol, y dos quintos de la superficie planificada para aguacate, con lo cual se logró sumar el 60% del total del terreno planificado para ambas frutas. Si el mango sembrado ocupa una superficie equivalente a lo que falta por sembrar del aguacate planificado.

a) ¿Cuántos km^2 faltan por sembrar de cada árbol para cumplir el plan?

b) Al ritmo actual de siembra ¿Qué % de la superficie disponible se siembra en 10 días?

Aquí debemos diferencial *terreno disponible* de *terreno planificado*, para una designación que nos conduzca al modelo correcto. Dado el texto conviene representar:

m, cantidad de km^2 planificados para mango
a, cantidad de km^2 planificados para aguacate

Lo cual conduce a las ecuaciones simultáneas, que modelan o formalizan lo sembrado del plan *durante los tres primeros días de la semana*

$$\begin{cases} (3,5 + \frac{1}{5}m) + \frac{2}{5}a = \frac{3}{5}(m+a) \\ 3,5 + \frac{1}{5}m = \frac{3}{5}a \end{cases}$$

Toca ¡**detenerse!** y observar la estructura del sistema, si en la primera ecuación efectuamos el paréntesis y al resultado restamos la segunda, lo cual se puede hacer mental, no es nada difícil, nos queda $\frac{2}{5}a = \frac{3}{5}m$ ó a=$\frac{3}{2}m$, que al sustituir en segunda ecuación resulta $3,5 + \frac{1}{5}m = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2}m$, que resulta, 3.5=$\frac{7}{10}m$, m=5 y a=7,5

Tenemos la solución del modelo, no necesariamente la solución del problema.

a) ¿Cuántos km^2 faltan por sembrar de cada árbol para cumplir el plan?
Según hemos designados, tenemos un plan de 5km^2 para mango y de 7,5 para aguacate. Pero lo sembrado está explícito en el miembro izquierdo de la primera ecuación, de la cual resulta: 1 km^2 sembrado del mango planificado y 3 de aguacate.
Respuesta para este inciso: Faltan 4 km^2 de mango y 4,5 de aguacate.

b) Se requiere determinar qué se siembra cada día, lo cual sería $\frac{1}{5}(m+a)$=2,5 km^2, que al multiplicarlo por 10, se tiene 25km^2, lo cual representa el 47.35% del terreno disponible.

Si se considera que he sido demasiado directo, o muy exigente para el alumno, tal consideración se debía empezar a cuestionar, es lógico que no todos los alumnos[8] llegan, pero qué está pasando con los muchos que sí pueden llegar, repuesta sencilla: egresan del bachiller con su potencial intelectivo anquilosado.

No se deduzca que se les deba impedir a los estudiantes que hagan todos los pasos que ellos necesiten hacer, pero se debe trabajar siempre para reducir ese *necesiten hacer,* que sería lo mismo que ganar habilidades.

Ejemplo 3 (Examen de ingreso a la educación superior año 2009)

[8] Yo presumo alumnos en Bachiller, con base para este nivel, no me refiero a los que están sin esta condición. Eso es tema desde otra perspectiva que en nada tiene que ver con las teorías didácticas, cuando estas aluden a grados escolares se refieren a nivel de conocimientos, es esencia del concepto.

El precio de una tonelada de cierta materia prima en el mercado mundial al cierre del año 2009 era el doble que en enero de 2002. De enero de 2010 hasta la fecha ha aumentado en 20 dólares más. La tonelada de esa materia prima, producida en Cuba, cuesta solo una vez y medio el precio que tenía en enero de 2002 en el mercado mundial. Si en lugar de comprar 225 t en el mercado mundial a precios actuales, se compra la tercera parte de esa cantidad en este mercado, y el resto se produce en Cuba, se gastan 7500 dólares menos.

a. ¿Cuál era el precio de la tonelada de esa materia prima en enero de 2002?

b. Halla en cuánto aumentó el precio de la tonelada de dicha materia prima en el mercado mundial, de enero de 2002 a la fecha.

Este problema fue realizado con éxito por un número muy reducido de estudiantes. Sin embargo una representación adecuada, seguida de una lectura inquisitiva, nos brinda un modelo sencillo para responder los dos incisos exigidos.

Sea p, el precio en dólar de una tonelada en enero del 2002.

2p, precio al cierre del 2009.

2p+20, precio hasta la fecha (precio actual)

1,5p cuesta producir una tonelada en Cuba

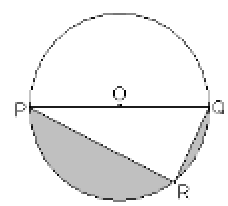
a) Ahora lo que resta del texto, a partir del punto y seguido, *Sin en lugar de comprar…* nos brinda exactamente el modelo matemático que da solución al problema. Se puede optar por un planteo largo y otro que es corto, si preferimos este último, entonces nos enfocamos en lo ahorrado, y tenemos la sencilla ecuación

$\frac{2}{3} * 225 * (0.5p + 20) = 7500$, téngase en cuenta que una tonelada producida en Cuba ahorra (2p+20)-1.5p.

Resolvemos la ecuación indicada $(0.5p + 20) = 50$ ó $p = 60$

b) Se calcula fácil.

Geometría



Como toda la matemática, los ejercicios de geometría contribuyen a disciplinar nuestra manera de razonar, y para muchos casos nos exigen representaciones mentales sin las cuales sería imposible dar solución a determinada situación problémica. Es decir no basta lo que vemos, es indispensable lo que en la mente nos representemos. Habiendo asegurado las relaciones básicas (definiciones, teoremas, corolarios, postulados, etc.) Expongo el tratamiento a algunos ejercicios representativos.

Planimetría

Ejemplo 1

En la figura se representa a una circunferencia de centro o y diámetro PQ. Si ángulo p=30º. Determine el perímetro de la superficie sombreada, de área 6,345dm^2.

Podemos empezar por expresar la definición de perímetro, aplicada a la figura dada

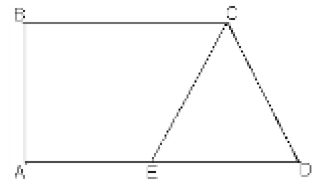
P=PQ+QR+PR+πr

Ahora nos remitimos, de nuevo, a los datos y a la figura. El hecho de ser R el vértice de un ángulo recto, y $< P$=30°, nos permite poner la expresión del perímetro en función del radio r=OQ, del tal modo

P=2r+r+r$\sqrt{3}$+ πr, al asumir $\pi = 3.14$ y $\sqrt{3} = 1.73$, se obtiene P=7,87r.

El problema ahora se reduce a la búsqueda del radio. Pero la idea que ya tenemos para encontrar área nos sirve perfectamente

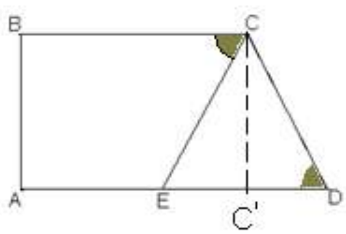
$A_{somb} = \frac{1}{2} A_{circ.} - A_{\Delta PQR}$ *=6,345; que al sustituir todo en función del radio, resulta:* $\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r \cdot sen\,60^o =$ $\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} r^2(\pi - \sqrt{3})$*= 6,345 que al despejar* $r^2 = \frac{6,345 \cdot 2}{\pi - \sqrt{3}}$*=9; con lo cual damos solución al ejercicio P=7,87· 3=23.61dm*



A un ejercicio como este no se le debe temer por los cálculos. ¿Qué justifica tanto apuro?, se asigna a los estudiantes y luego se analiza en elaboración conjunta. Lo puse de primero por su nivel de generalidad, pero el profesor lo presenta cuando él lo entienda conveniente conforme a su contexto. Nunca perder de vista el desarrollo del cálculo mental, es una valiosa herramienta cognitiva que nos ahorra tiempo y errores.

Ejemplo 2

La figura representa el trapecio ABCD, recto en A, se conoce, además: AB:CD como 1,732:2, el triángulo CDE es isósceles de base ED y



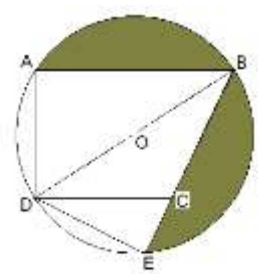
$\frac{1}{2}$ AD=AE=5dm. Determina

a) Perímetro y área del trapecio ABCD
b) Amplitud del ángulo BCE

De los datos y la figura se plantea el perímetro P=AB+BC+CD+10
¿Cómo calcular las otras longitudes? Dado el dato AB:CD como 1,732:2 y la figura, una ocurrencia pudiera ser trazar CC'⊥ED. En no pocos ejercicios los datos nos indican valiosas ocurrencias, en general, estos siempre constituyen herramientas heurísticas.

Con lo cual AB=CC', luego $\frac{CC'}{CD} = \frac{1,732}{2}$=sen$\boldsymbol{D}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ por tanto ∠D=60°

Y en consecuencia el ΔCDE es equilátero de lado con longitud 5dm. Todo lo demás se resuelve fácil. Reitero, indiqué el dato dado por la razón "*AB:CD como 1,732:2",* como propulsor de la ocurrencia. En el proceso heurístico no sería un mal procedimiento, pero debemos cuidarnos de los datos parásitos. Yo llamo parásito a cualquier dato que al utilizarlo me desvía de algún camino acertado para encontrar la solución. Claro si se trata de un dato real, al final nos puede servir para verificar la compatibilidad de los resultados obtenidos, aun cuando no lo utilicemos en el proceso de resolución.



Ejemplo 3

La figura representa una circunferencia con un trapecio interior de bases AB y DC, el diámetro BD biseca al ángulo ABC=60º, los puntos A y E pertenecen a la circunferencia. Conociendo que el perímetro del triángulo ECD=23,66 dm. Calcula:

a) El área sombreada.
b) El perímetro del área sombreada.

a) De la observación de la figura se deduce que el área solicitada está compuesta por dos segmentos iguales, pues es evidente la congruencia de los triángulos ABD y BDE (se debe justificar).
Planteamos la relación $\frac{1}{2} A_{somb} = A_{sector\,\widehat{AB}} - A_{\Delta AOB}$. Que en función de la figura es

$\frac{1}{2}A_{somb} = \pi r^2 \cdot \frac{\angle AOB^o}{360^o} - \frac{1}{2}r^2 sen\angle AOB$

De modo que se requiere conocer el valor de r y del ángulo AOB. Dada la condición de BD bisectriz y el ángulo A recto, entonces ∠ADB=60° (Se observan otras vías). Es decir ∠AOB=120º. De tal modo el área del sector es $\frac{1}{3}\pi r^2$

La semejanza de los triángulos ABD y DCE se justifica fácil, así como DE=r por ser cuerda que corresponde a un ángulo inscrito de 30°. De tal manera, si designamos por a la longitud del cateto menor para el triángulo DCE, resulta perímetro P=a+2a+a$\sqrt{3} = 23.66$

Tomando $\sqrt{3} = 1,73$; se tiene a=5$\therefore r = 5\sqrt{3}$ ó r^2=75

Dado que ∠AOB=120º, el área buscada se expresa: $\frac{1}{2}A_{somb} = \frac{1}{3} * 3,14 * 75 - \frac{1}{2} * 75 * \frac{\sqrt{3}}{2}$ *que al calcular obtenemos* $A_{somb} = 92dm^2$

b) Como evidencia la figura el perímetro está dado por P=2AB+$\frac{2}{3} * 2\pi r$; dado que AD=5$\sqrt{3}$, entonces AB=15, con lo cual P=30+ $\frac{4}{3} * 3,14 * 5\sqrt{3dm} = 66.26dm$

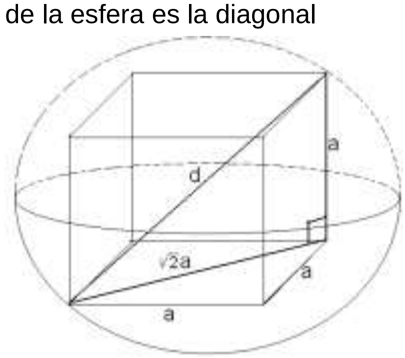
Cálculo de cuerpo

Ejemplo 1

¿Qué volumen debe tener una esfera para que pueda inscribir a un cubo de $64dm^2$?

Para hacer este ejercicio no se requiere figura, basta con la representación mental. Después de una reflexión previa se concluye que nos interesa conocer la diagonal interior del cubo, pero ésta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene como catetos la diagonal de una cara del cubo y la arista del cubo perpendicular en un extremo de esta diagonal. Sería muy útil llegar a esta conclusión sin la figura. (Siempre utilizo este tipo de ejercicios con mis alumnos y les sugiero que no hagan uso de trazado para llegar a esta conclusión). Es lógico que deban dominarse los conceptos básicos que intervienen: cubo, cubo inscrito, diagonal interior, esfera. De cualquier manera para los alumnos que no lleguen siempre será necesaria la ilustración gráfica, pero precedida del esfuerzo para llegar. Les digo más, como en realidad siempre construimos las cosas dos veces (una pensada y otra graficada en objeto externo), los que no desarrollen habilidades para la representación mental, poco podrán expresar en el papel. Lo cual no niega que los primeros trazados nos puedan inducir a la figura deseada.

En la representación mental no hay interferencia para decidir que el diámetro de la esfera es la diagonal interior, que sería, dado el caso, hipotenusa *d* de un cateto *a*=4 y otro cateto 4$\sqrt{2}$, lo cual nos conduce, al aplicar Pitágoras, *d =*4$\sqrt{3}$, con lo cual se llega el radio *r=*2$\sqrt{3}$, y se calcula el volumen solicitado.



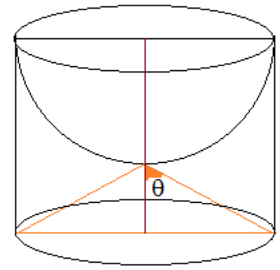
Ahora toca verificar con la ilustración gráfica.

Interpretando los ochos vértices del cubo como puntos de la esfera.

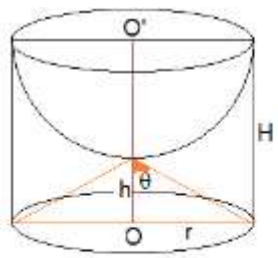
Ejemplo 2

En la figura se representa un cuerpo formado por un cilindro circular recto de altura H, un cono de altura h y una semiesfera de radio r. Las bases del cilindro son las bases del cono y la semiesfera respectivamente. El vértice del cono es un punto de la semiesfera. El volumen del cilindro es 471 cm^3. La generatriz del cono y la altura forman un ángulo θ = 63,5°. Calcula el volumen del cono.

La primera ocurrencia que moviliza la heurística proviene de plantear la expresión formal (la fórmula) que nos define el volumen de un cono
$V_{con} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$



Ahora conviene asignar letras, en la figura, a las magnitudes que necesitamos conocer. De tal modo la fórmula nos queda en función de la figura particular, $V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$; con lo cual el problema se reduce a encontrar el valor para r y el valor para h.
Al tomar el dato volumen del cilindro, $\pi r^2 \cdot H = 471$ tenemos una ecuación de dos variables desconocidas, lo cual nos sugiere relacionar una en función de la otra. Para este propósito nos sirve el otro dato "ángulo θ = 63,5°"



Como ilustra la figura, h y r forman los catetos de un triángulo rectángulo del cual se conoce la amplitud de sus ángulos. El dato θ = 63,5°, nos permite expresar a h en función de r, y viceversa, según convenga: tan$\theta = \frac{r}{h} = 2$, de donde r=2h. Ahora volvemos al dato, *volumen del cilindro*, con lo cual podemos encontrar los valores que necesitamos haciendo uso de la fórmula para el volumen del cilindro, pero en función de esta última figura. $V_{cilindro} = \pi(2h)^2 3h = 12\,\pi h^3 = 471$ ó $\pi h^3 = \frac{471}{12}$,

pero el volumen que buscamos es $V_{con} = \frac{1}{3}\pi(2h)^2 \cdot h = \frac{4}{3}\pi h^3 \cdot$

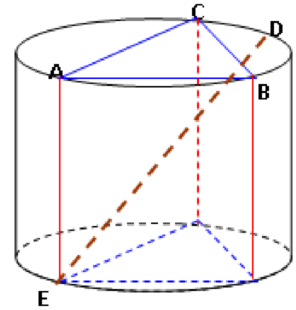
Que al sustituir se llega a $V_{con} = \frac{4}{3} \cdot \frac{471}{12} = 52.3cm^3$

Ejemplo 3

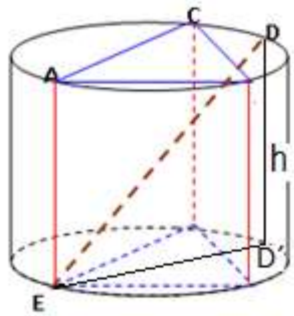
La figura representa una pieza cilíndrica maciza de 3,0 cm de radio, de la cual se quiere obtener un prisma recto, cuyas bases son triángulos equiláteros inscritos en las bases del cilindro.
La base superior del prisma es el triángulo ABC, E es la proyección de A en la base inferior del prisma, D es el punto medio del arco BC y $\overline{ED} = 10cm$.

a) Halla el volumen del prisma
b) Calcula cuántos centímetros cúbicos de material se desperdician al obtener el prisma.

Este ejercicio fue presentado en un examen para ingreso a la Educación Superior, un % alto, más de lo esperado, de estudiantes no logró resolverlo.
a) Este inciso nos sugiere plantear la fórmula para el volumen del prisma
$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$, en nuestro caso la base es un triángulo equilátero del cual se conoce $\frac{2}{3}$ de su altura=3cm, y en consecuencia la $h_{\Delta} = 4{,}5cm$, este análisis y cálculo pueden y deben intentarse, y justificarse mental (por lo menos si no estamos haciendo examen escrito).
Ahora nos falta h, para lo cual nos fijamos en los datos y en la figura, buscando alguna relación entre las magnitudes representadas y las auxiliares que conviene trazar.



ED y el diámetro dados, nos sugieren trazar la altura DD' y formar el triángulo EDD' que es recto en D', de éste conocemos las longitudes de la hipotenusa ED=10cm y del cateto ED=6cm. Que es diámetro y paralelo a AD, nos lo asegura el dato "D es el punto medio del arco BC". De este modo tenemos h=8cm, que forma trío pitagórico con 10 y 6.
Como conocemos la altura del triángulo base, que es equilátero, se tiene
$V_{prisma} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h_{\Delta}^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4{,}5^2 \cdot 8 = 93.53cm^3$



b) Para este inciso, y similares, se parte del planteo de una expresión, generalmente ecuación, que refleje o evidencie que se ha entendido, ***lo que se debe hacer***, que es el nivel cognoscitivo que precede al ***cómo hacer***.
La condición "se desperdician al obtener el prisma" nos induce a calcular la diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen del prisma,
$V_{material} = V_{cilindro} - V_{prisma}$
$V_{material} = \pi r^2 h - 93.53 = 3.14 \cdot 9 \cdot 8 - 93.53 = 132.55cm^3$ *es la cantidad de material que se desperdicia al construir el prisma.*
Nota: No soy partidario de los redondeos que se exigen, e incluso crean precedentes negativos. Lo cual no niega que algunos se puedan e incluso deban hacerse, pero el aprendizaje debe consistir en identificar en qué casos el redondeo se reqiere y en qué casos no se debe redondear. Algunos resultados representan contenidos que no admiten ser modificados, ¿serviría un cilindro, para motores, de radio 3. 66mm si lo redondeamos a 3.7mm? Si con este redondeo decidiéramos una produción, la pérdida sería total.

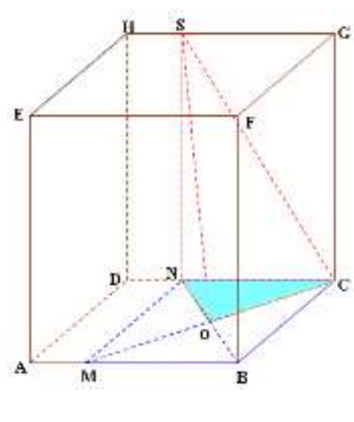
Ejemplo 4
En la figura se muestra una pieza maciza en forma de prisma recto ABCDEFGH de base rectangular ABCD, con una perforación en forma de pirámide NOCS. NOC es un triángulo determinado por las diagonales del cuadrado MBCN contenido en el plano de la base inferior del prisma. La altura $\overline{SN}$ de la pirámide tiene la misma longitud que la altura del prisma, M y N son puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. O es el punto de intersección de las diagonales $\overline{NB}$ y $\overline{MC}$ del cuadrado MBCN. $S \in \overline{HG}$;
$\overline{DN} = 2{,}0\ cm$, $\overline{AB} = 8{,}0\ cm$; $\angle NCS = 60^{\circ}$

a) Calcula el volumen de la pieza y exprésalo en decímetros cúbicos.

Lo primero que debemos es identificar la pieza, porque esta figura se compone de varias piezas. El texto la precisa bien "una pieza maciza en forma de prisma recto ABCDEFGH de base rectangular ABCD, con una perforación en forma de pirámide NOCS". De modo que tal descripción nos ubica en una pieza ahuecada, y en consecuencia $V_{pieza} = V_{prisma} - V_{pirámide\ NOCS}$

$V_{pieza} = A_{base} \cdot h - \frac{1}{3} A^{*}_{base} \cdot h$; nótese que la altura h=SN es la misma para ambas figuras, no así el área, que he diferenciado con un asterisco.

Ahora es preciso expresar esta diferencia en función de las magnitudes representadas en la figura; $V_{pieza} = AB \cdot BC \cdot SN - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} BC^2 SN$*; solo nos falta calcular SN, y dado que* $\angle NCS = 60^{\circ}$ *y NC=6, entonces SN=6*$\sqrt{3}$*. Al sustituir resulta*
$V_{pieza} = 8 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} - \frac{1}{12} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 270\sqrt{3} = 467{,}65cm^3 \approx 0{,}47dm^3$



Dada la figura y los datos, este ejercicio no exige detenerse en otras relaciones básicas. Para el área del triángulo NOC basta con advertir que es la cuarta parte del área del cuadrado y la altura, basta con que sea el cateto que se opone a ángulo 60°. Aun cuando, al detallar los pormenores, nos creamos buenos didácticos y asequibles, no lo seríamos realmente si no desarrollamos habilidades en aprovechar lo particular en cada situación dada, si nos agotamos con razonamientos innecesarios, si de tanto concentrarnos en las partes y sus relaciones particulares se nos dificulta aprender a ver el todo y a sus relaciones más generales.

Otros ejercicios

Designaremos por **"otros"** a los ejercicios que exigen aplicar dos o más contenidos diferentes, en particular haremos uso del legado de Descartes, el francés que nos indujo al uso del algebra relacionada con la geometría.

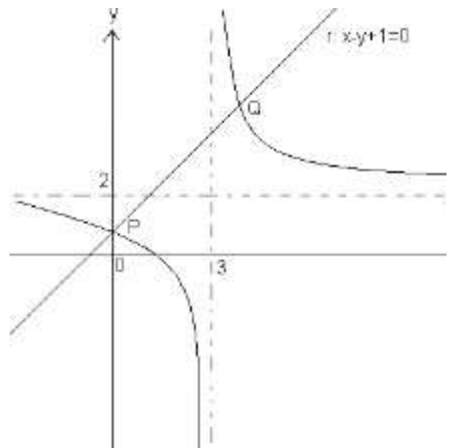
Ejemplo 1

La figura representa un sistema de coordenadas de centro O, un arco de circunferencia de igual centro y tangente en T a la recta r: Ax+By+C=0. Determina:

a) Ecuación de la recta r

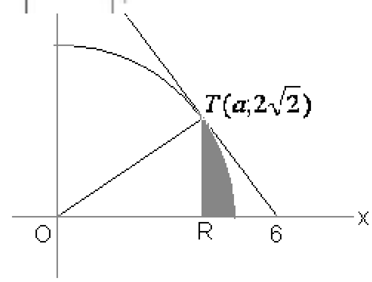
b) Área sombreada. (TR perpendicular al eje "x")

Este ejercicio es adecuado para analizarlo con los estudiantes.



a) ¿Qué necesitamos para expresar la ecuación de una recta? Si nos proponemos hacerlo a partir de dos puntos, entonces basta con calcular el valor de la abscisa "a" del punto de T.

Al tomar el triángulo mayor y ubicar los datos convenientemente, se nos ocurre cómo calcular esta abscisa. Se evidencia un triángulo rectángulo en T con los elementos que relacionan la altura y los segmentos que ésta determina en la hipotenusa, lo cual nos sugiere intentar con la relación $(2\sqrt{2})^2 = a(6-a)$, como es lógico, cada profesor reactiva esta relación conforme a su contexto (nivel que trabaja, tiempo de impartida, habilidad de sus alumnos, etc.)



La ecuación cuadrática $a^2-6a+8=0$ tiene solución $a_1=4$ y $a_2=2$; como evidencia la figura, se toma $a_1=4$, con lo cual tenemos dos puntos para la ecuación de la recta r: (6;0) y (4; $2\sqrt{2}$)

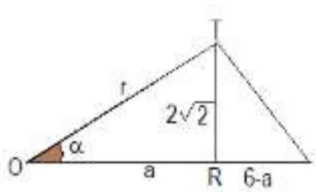
$m_r= \frac{2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2}$; hacemos uso de la estructura r: $y-y_o=m(x-x_o)$, para llegar a la recta

r: $\sqrt{2}x + y - 6\sqrt{2} = 0$

b) El área sombreada está determinada por el área del sector que determina el ángulo TOR menos el área del triángulo TOR; $A_{sombreada} = A_{sector} - A_{\Delta TOR}$

$A_{sombreada} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^o}{360^o} - \frac{1}{2} OR \cdot RT$; al aplicar Pitágoras $r^2=24$ y el uso de una razón trigonométrica nos da $\alpha^o = 35{,}26°$, que al sustituir y calcular: $A_{sombreada} = 1.72u^2$

Ejemplo 2



El gráfico representa a una función de la forma $h(x) = \frac{a}{x+b} + c$, h y r se intersecan en los puntos P y Q,

(P∈"y")

a) Expresa la ecuación de la función h

b) Determina dominio e imagen de h

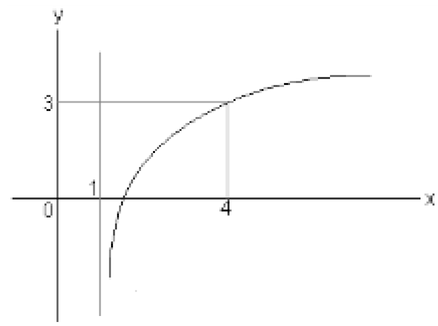
c) Calcula la longitud del segmento PQ

d) Determina las coordenadas de los puntos de intersección de h y de r con el eje "x"

e) Argumenta la proposición.

$$"\ para\ \ x_1, x_2 \in (-\infty;3), tal\,que\ x_1 < x_2$$
$$se\,cumple\ h(x_1) > h(x_2)"$$

a) Los valores de b y c están explícito en el gráfico, para justificar a "b" el gráfico indica para qué valor de x se indefine h, que podemos llamarle asíntota vertical. Aunque en nivel medio no demos una definición de asíntota en función del cálculo infinitesimal, sí se puede hacer la caracterización geométrica entendible por los estudiantes. En general para funciones fraccionarias, que son las tratadas en el nivel, la asíntota vertical se calcula igualando a cero el denominador de la función ya estando con la estructura aquí representada, x+b=0; x=-b. Que para nuestro caso 3=-b ó b=-3. La orientación "siempre se toma el opuesto de b" solo es válida para coeficiente 1 de x)



La justificación de la asíntota horizontal es algo menos familiar, pero aun así no es tan ilusorio admitir que podamos (alumnos y profesores) entender que a medida que x se hace muy grande, entonces el término $\frac{a}{x+b}$ se hace muy pequeño, y en consecuencia $\frac{a}{x+b} + c$ tiende a "c".

En fin nos queda h(x)= $\frac{a}{x-3} + 2$, ¿Cómo determinamos el valor para "a"?, ¿Qué datos nos brida la figura?, solo nos queda la posibilidad de localizar un punto que **observando** bien lo tenemos asegurado, pues las funciones se intersecan en P el cual está en "y", de modo que tenemos un punto de abscisa cero, pero como este punto está en r, entonces es fácil advertir y=1, con lo cual P(0;1) es el punto que necesitamos. h(0)= $\frac{a}{0-3} + 2 = 1$, de donde a=3 y en consecuencia h(x)= $\frac{3}{x-3} + 2$

b) En este tipo de función las asíntotas nos orientan el dominio y la imagen.
Dominio x$\in R: x \neq 3$ e imagen y$\in R: y \neq 2$

c) Las coordenadas de Q las encontramos con la solución de la ecuación $\frac{3}{x-3} + 2 = x + 1$; que nos daría la abscisa x=4 y la ordenada, al sustituir en la función o en la recta, y=5. Luego Q(4;5) y P(0;1) distan $4\sqrt{2}u$

d) Se trata del cero para cada función $(\frac{3}{2};0)$ para h y (-1; 0) para r.

e) La proposición es verdadera porque en este intervalo la función h decrece.

Ejemplo 3

De la función $t(x) = \log_a(3x+b)+1$ se conoce:

- a y b son números enteros
- Está representada por el gráfico

Determina:

a) Valores de a y b
b) Dominio, imagen y monotonía de t
c) Calcula x_o si (x_o;6) pertenece a la función t

De los datos, la observación de la figura y lo pedido, lo primero que podemos encontrar es el valor de b. Como x=1 es la recta asíntota que delimita el dominio de la función t, entonces 3x+b>0 ó x>- $\frac{b}{3}$; con lo cual b=-3 y en consecuencia $t(x) = log_a(3x-3)+1$, el gráfico contiene al punto de coordenadas (4;3) con el cual podemos calcular el valor de la base a ; $t(4) = log_a(3*4-3)+1 = 3$; ecuación válida para a=3.

O sea $t(x) = log_3(3x-3)+1$

b) La figura evidencia

c) La ecuación $log_3(3x_o - 3) + 1 = 6$ tiene solución $x_o = 82$

Ejemplo 4

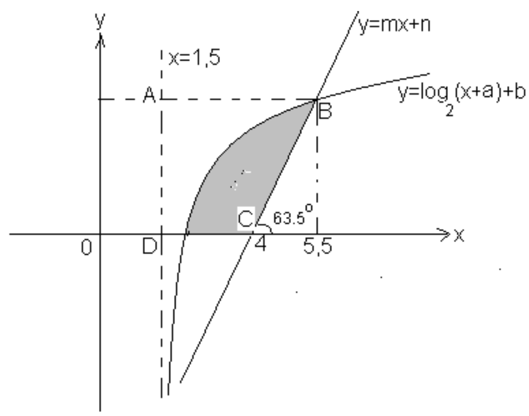
La figura representa un sistema de coordenadas con la función y=$asenbx$ interior al pentágono ABCDE, ED||AB||"x", BC ⊥ OH, área del triángulo curvilíneo FBH=0.428 dm^2 y el segmento DC pertenece a la recta y=0.4m+n Calcula:

a) El área de la región sombreada

b) Verifica que el área del triángulo curvilíneo FKH= $q(\frac{\pi}{4}) - q(0)$ siendo q(x)=-$\frac{3}{4}$cos2x

Al observar el gráfico, y dado que se trata de un segmento de función impar, el área a calcular se puede expresar: $A_{región} = A_{EDCHO} - A_{\Delta FKH}$

Para el cálculo del pentágono calculamos primero el área de rectángulo EC'HO, siendo C' el punto donde la prolongación de ED toca al segmento CH. (Trazado que se hace en la figura auxiliar)



$A_{EC'HO} = 1.5 * 3.14 = 4.71$, ahora calculamos el área del triángulo DC'C=$\frac{1}{2} * \frac{3\pi}{4} * C'C$, pero dado que el segmento DC pertenece a la recta y=0.4m+n, entonces $\frac{C'C}{\frac{3\pi}{4}}$ =0.4 ó C'C=0.942

$A_{\Delta DC'C} = \frac{1}{2} * \frac{3\pi}{4} * 0.942 = 1.1$, que al sumarla al área de rectángulo resulta $A_{EDCHO} = 5.81$

Para el área que nos falta $A_{\Delta FKH}$ basta advertir que trata de un cuarto del área del rectángulo, ya encontrada, menos el área del triángulo dada como dato: $A_{\Delta FKH} = \frac{4.71}{4} - 0.428 = 0.7495$

Finalmente $A_{región} = 5.81 - 0.7495 = 5.06dm^2$

Ejemplo 5

La figura representa a una función de la forma $h(x) = \lg_2(x + a) + b$ intersecada por la recta r: y=mx+n. Determina

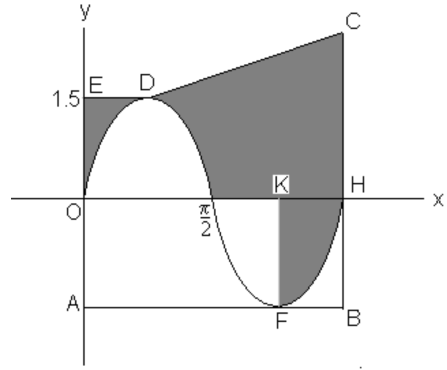
a) Los parámetros de ambas funciones

b) Cero de la función h, dominio e imagen

c) Área sombreada, sabiendo que ésta representa el 48.2% del área del cuadrilátero ABCD. (AB||DC)

d) Imagen de h para dominio de definición (1.5; 9.5]

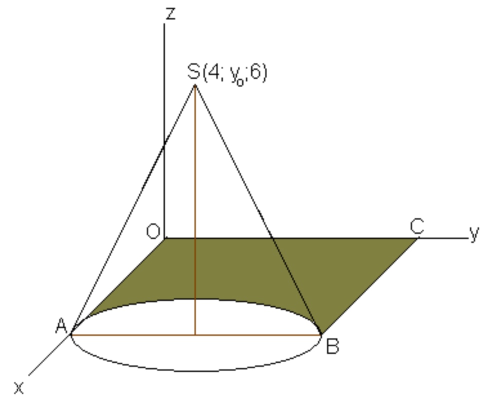
e) Expresa la ecuación de la recta r' que es ortogonal a r y contiene al punto A.



a) **Observamos** la figura y comenzamos por la recta, pues ya se tiene un punto explícito (4;0) y el ángulo que nos proporciona el valor para m.

tan63.5°=2. Es decir r: y-0=2(x-4) ó y=2x-8

Para la función h, la figura nos indica el valor para a, de esta forma $h(x) = lg_2(x - 1.5) + b$, con lo cual nos falta calcular a b, pero podemos hacerlo localizando un punto de la función h. Como r interseca a h en B, este punto es común para ambas funciones y fácil de determinar, pues basta calcular qué valor toma "*y*" en la recta cuando x=5.5, de tal manera y=3, y en consecuencia B(5.5;3). Al sustituir en h se tiene $h(5.5) = lg_2(5.5 - 1.5) + b = 3$ ó b=1, con lo cual nos queda la ecuación definitiva $h(x) = lg_2(x - 1.5) + 1$



b) Cero, por definición de cero $lg_2(x - 1.5) + 1 = 0$ ó x=2, dominio x>1.5, imagen y$\in R$

c) El área del cuadrilátero $\frac{1}{2}(AB + DC)AD$=$\frac{1}{2}(4 + 2.5)3 = 9.75$, estos valores para las bases y la altura se toman directamente de la figura sin escribir operaciones. Finalmente $\frac{48.2}{100} * 9.75 = 4.7u^2$

Nota: El profesor, si lo desea, puede comprobar este resultado calculando $\int_2^{5.5}[log_2(x - 1.5) + 1]dx - A_{\Delta BCB'}$, (Asumiendo B' como la proyección de B en "x")

d) Como se trata de una función estrictamente creciente la imagen pedida es h(1.5)<y$\leq$h(9.5), que al evaluar resulta (-$\infty < y \leq 4$)

e) El punto A(1.5;3) y la pendiente $-\frac{1}{2}$ originan la recta 2x+4y-15=0

Ejemplo 6

La figura representa un sistema de coordenadas rectangular "xyz". En el plano "xy" está situada la base de un cono circular recto de diámetro AB y el rectángulo ABCO. Si el área sombreada mide 9.87u^2, y_o >2.5 Determina

a) Volumen y área lateral del cono

b) Amplitud del ángulo SBC. Justifica

c) Amplitud del ángulo que forma la altura del cono con la generatriz.

a) Comenzamos con el planteamiento de la fórmula, que en este caso no guía para la búsqueda $V_{cono} = \frac{1}{3} A_{base} * h$

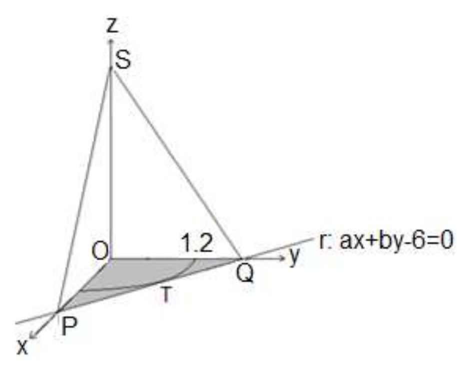
Que según figura $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi * r^2 * 6$; lo cual indica que necesitamos la longitud de AB=2r, pero por datos y observando la figura $2r * 4 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 9.87$ que conduce a la ecuación $\pi r^2 - 16r + 19.74 = 0$, para los fines de este ejercicio tal ecuación cuadrática se resuelve con una calculadora, aquí es un medio, no fin. De las dos soluciones tomamos r=3 (en virtud de la condición y_o >2.5 y tomando $\pi = 3.14$). Llegamos al volumen buscado

$V_{cono} = \frac{1}{3} 3.14 * 3^2 * 6 = 56.52u^2$

Este ejercicio brinda la idea. El profesor puede confeccionar otros conforme a su contexto y de cálculos menos tediosos. En lo personal creo útil que los alumnos se enfrenten a estos cálculos inexactos porque son los que más aparecen en la realidad.

Los incisos b y c exigen los procedimientos básicos que conocemos: el teorema de las tres perpendiculares y uso de razones trigonométricas respectivamente.

Ejemplo 7



La figura representa un sistema de coordenadas rectangular, la recta r: ax+by-6=0 está en el plano "xy", y es tangente en T al arco de circunferencia de centro O. Conociendo que a-b=1 y área del triángulo PQS es 3,75u^2. Calcula el volumen de la pirámide OPQS.

Empezamos por plantear la fórmula, que nos indica la primera exigencia heurística $V_{pirám.} = \frac{1}{3} A_{base} * h$, conforme a la figura $V_{pirám.} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} * OP * OQ * OS)$

En un caso como este son los datos los que nos proveen de alguna vía de búsqueda para las tres longitudes que necesitamos. Si logramos conocer la ecuación de la recta, ya tenemos asegurado los valores para los catetos del triángulo base. El dato del radio r=1.2, la tangencia en T y la fórmula para distancia de un punto a una recta nos puede permitir conocer los valores para a y b en la ecuación de la recta. De tal información expresamos dos ecuaciones simultáneas, la ya dada

a-b=1 y d(Origen, r)=$\frac{|-6|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1{,}2 \leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \frac{6}{1.2} = 5$; con lo cual obtenemos el sistema $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$; dos números de diferencia 1 y que además sean pitagóricos de suma 25, son a=4 y b=3. El profesor orienta a los estudiantes la solución del sistema.

Ahora con la recta 4x+3y-6=0, tenemos para x=0, OQ=2 y para y=0, OP=1.5 con lo cual tenemos el área de la base.

Con el área del triángulo PQS y OT=1.2 hallamos las longitudes para PQ y de la altura OS. Ambos casos aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos PQ=2.5, que es la base del triángulo de altura ST (por qué ST es altura) y área dada 3.75, que al despejar en la fórmula para el área de este triángulo resulta ST=3 y

por tanto $\boldsymbol{OS^2 = 3^2 - 1,2^2}$= 2.75; con lo cual obtenemos el volumen solicitado

$V_{pirám.} = \frac{1}{6}(1.5 * 2 * 2.75) = 1.375u^3$