Dos Modelos de Gestión de Cartera

Cesar Humberto Antunez Irgoin

http://www.eumed.net

La investigación más pura nace de los esfuerzos de resolver problemas prácticos y la mejor investigación aplicada nace de la curiosidad intelectual.

(Fisher Black)

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

El Modelo de Equilibrio de los Activos Financieros intenta explicar como se puede obtener el precio de determinados activos financieros con relación al riesgo de cada activo. Este modelo intenta encontrar el precio justo de cada activo, que asegure al inversor un retorno justo que compense el riesgo de dicho activo, siempre que este en una cartera bien diversificada.

Los autores de este modelo fueron los economistas: Sharpe, Lintner, Mossin y Treynor. Este modelo descansa en la Teoría de la Cartera de Markowitz, pero agrega algunos supuestos más:

✓ Los inversores elige un portafolio, en base el retorno y el riesgo únicamente.

✓ Todos los inversionistas tiene el mismo horizonte de decisión en cuanto a las inversiones.

✓ Los inversionistas son aversos al riesgo y buscan maximizar el retorno esperado de los rendimiento.

✓ Existe homogeneidad en las expectativas y en el conjunto de inversiones posibles.

✓ Existe competencia perfecta en el mercado de capitales, no existen costos de transacción, ni impuestos a la renta, capitales y transferencia de títulos, todos los activos son infinitamente divisibles, la información no tiene costo y esta al alcance de todos los inversores, por lo que se pueden endeudarse y prestar a la misma tasa sin limitaciones.

El Modelo de Precios de Activos del Capital relaciona el riesgo y el rendimiento requerido. La tasa de rendimiento requerida por los inversionistas consiste de un rendimiento libre de riesgo, más una prima para compensar al inversionista por el riesgo (esta prima varia de una acción a otra).

$$r_e = r_f + \beta_e (r_m - r_f) + r_p$$

Donde,

r_e : Es el costo de capital propio o patrimonio.

r_f : Es el retorno libre de riesgo.

β_e : Es el beta de la empresa.

$r_m - r_f$: Es la prima del mercado.

r_m : Es el retorno esperado del mercado.

r_p : Es el riesgo país.


La tasa libre de riesgo

Es un instrumento sin riesgo, que nos permite comparar todas las inversiones de la economía. Usualmente se usa los Bonos del Tesoro Norteamericano por que son sin riesgo (no existe la posibilidad de incumplimiento de pago o default).

La prima del mercado

Es la diferencia entre la tasa de retorno esperada en el mercado y la tasa de retorno libre de riesgo.
Una alternativa para su cálculo consiste en el uso del *spread* histórico entre los bonos de gobierno americano y el rendimiento del índice general del mercado de capitales local.
En mercados en desarrollo, que generalmente presentan alta volatilidad de los precios y la baja liquidez de papeles es mejor usar la prima históricas local.


El beta de la empresa

El beta (riesgo sistemático) del patrimonio de la empresa, nos mide el riesgo relativo del capital propio de la firma comparado al mercado.

La prima por riesgo país

Esta variable nos permite ajustar la rentabilidad del capital accionario, para reflejar el riesgo de invertir en un país y no en otro país.

Existe dos métodos muy utilizados que son la *volatilidad relativa* y el *Country debt spread*.

1. El Sistema Económico de Referencia

- ✓ Para nuestro ejercicio usaremos a la economía peruana.
- ✓ Empresa Mayra King.
- ✓ Supuesto clave es que la economía peruana funciona en un mercado de capitales eficientemente.

2. Estimación de cada Variable

a) Estimación de tasa de interés libre de riesgo (r_f)

✓ Tasa de Certificados de Depósitos a 90 días del Banco Central de Reserva del Perú (CDBCRP).

Mes	*i*-CDBCRP	Tasa Nominal
OCT	4.61%	0.0461
NOV	4.58%	0.0458
DIC	4.47%	0.0447
Tasa de interés mensual (r_f)		0.0038

b) Estimación de tasa de interés de mercado (r_m)

✓ Se estima un Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (cada 15 días).

$$Indice = \left(\frac{X_t - X_{base}}{X_{base}} + 1 \right) x100$$

$$r_m = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{m_i}$$

Período	IGBVL	Índice Base	r_m
15-jul	10.828	100.00	
15-ago	10.836	100.0739	0.0007
15-Set	10.839	100.1016	0.0003
15-sep	10.894	100.6095	0.0051
15-oct	10.456	96.5645	-0.0402
15-Set	10.546	97.3956	0.0086
15-nov	10.568	97.5988	0.0021
15-dic	10.685	98.6793	0.0111
15-Set	10.694	98.7625	0.0008
15-ene	10.025	92.5840	-0.0626
15-feb	10.012	92.4640	-0.0013
15-Set	10.368	95.7518	0.0356
15-mar	10.360	95.6779	-0.0008
15-abr	10.433	96.3521	0.0070
15-Set	10.241	94.5789	-0.0184
15-may	10.391	95.9642	0.0146
15-jun	10.538	97.3218	0.0141
15-Set	10.866	100.3509	0.0311
15-jul	10.841	100.1201	-0.0023
		Suma(r_m)	0.0057

c) Estimación de tasa de interés del activo – Mayra King (r_e)

✓ Se estima la rentabilidad esperada a partir del precio del activo.

$$Indice = \left(\frac{X_t - X_{base}}{X_{base}} + 1 \right) x100$$

$$r_e = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{e_i}$$

Período	Precio	Índice precio	*re*
15-jul	8.025	100.00	
15-ago	8.036	81.7654	-0.1823
15-Set	8.125	82.6720	0.0111
15-sep	8.256	84.0049	0.0161
15-oct	8.354	85.0020	0.0119
15-Set	8.357	85.0326	0.0004
15-nov	8.456	86.0399	0.0118
15-dic	9.024	91.8193	0.0672
15-Set	9.218	93.7932	0.0215
15-ene	9.038	91.9617	-0.0195
15-feb	9.215	93.7627	0.0196
15-Set	8.651	88.0240	-0.0612
15-mar	8.695	88.4717	0.0051
15-abr	9.386	95.5026	0.0795
15-Set	9.451	96.1640	0.0069
15-may	9.460	96.2556	0.0010
15-jun	9.512	96.7847	0.0055
15-Set	9.765	99.3590	0.0266
15-jul	10.215	103.9377	0.0461
		Suma(r_e)	0.0671

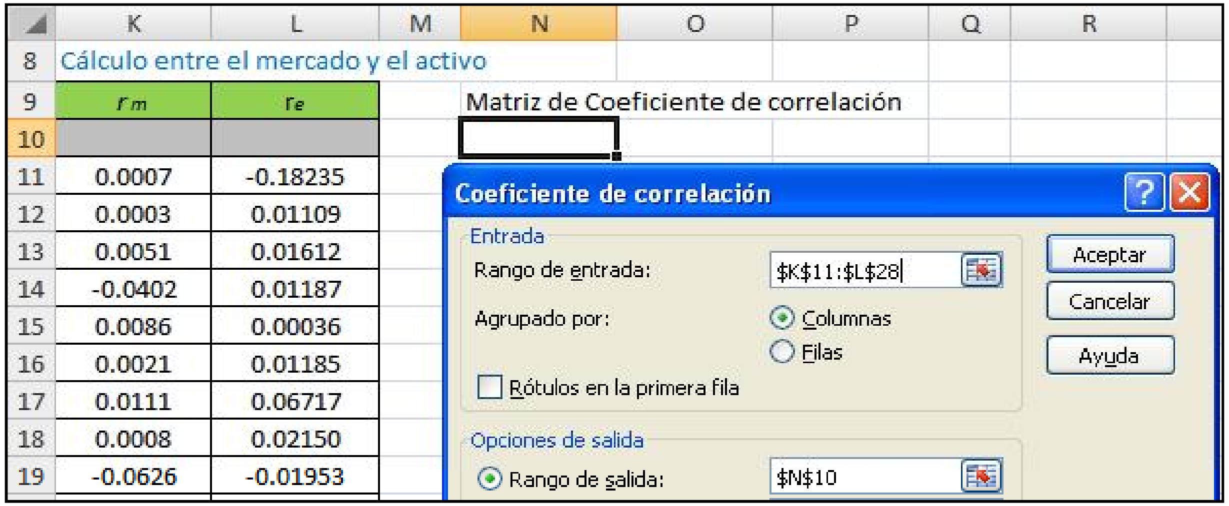
d) Cálculo entre el mercado y el activo (r_m - r_e)

- ✓ Bolsa de Valores de Lima vs Mayra King

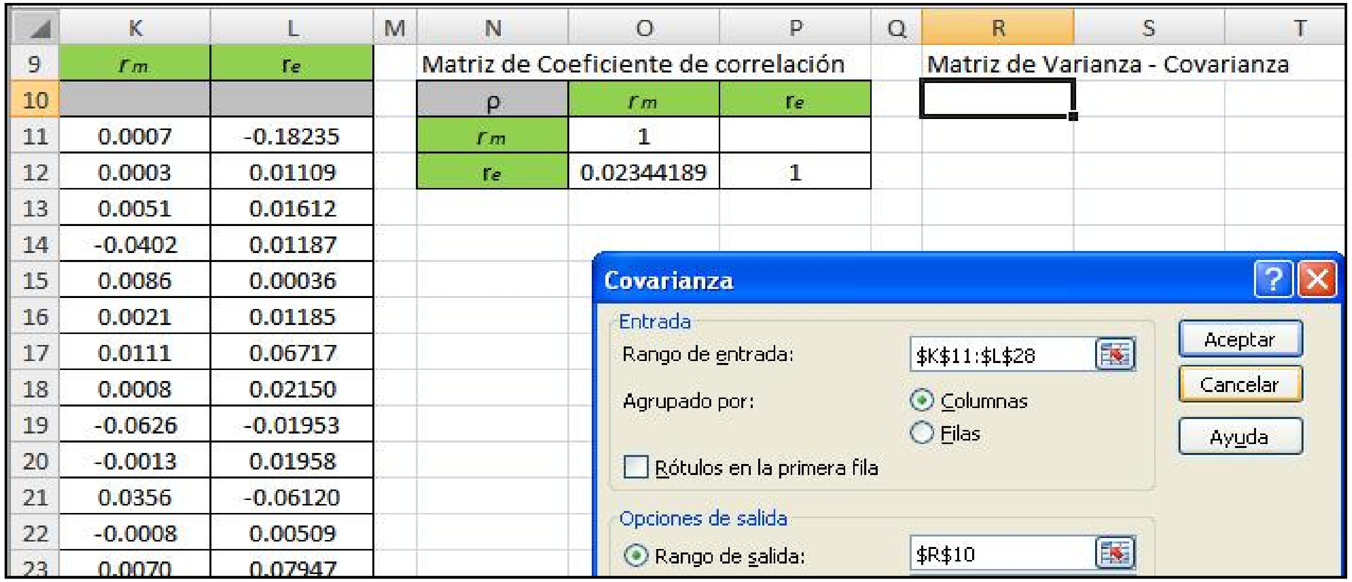
Ahora usaremos las herramientas de análisis de Excel, para hallar:

- ✓ Coeficiente de correlación.
- ✓ Covarianza.

r_m	r_e
0.0007	-0.18235
0.0003	0.01109
0.0051	0.01612
-0.0402	0.01187
0.0086	0.00036
0.0021	0.01185
0.0111	0.06717
0.0008	0.02150
-0.0626	-0.01953
-0.0013	0.01958
0.0356	-0.06120
-0.0008	0.00509
0.0070	0.07947
-0.0184	0.00693
0.0146	0.00095
0.0141	0.00550
0.0311	0.02660
-0.0023	0.04608



	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	Cálculo entre el mercado y el activo							
9	r_m	r_e		Matriz de Coeficiente de correlación				
10								
11	0.0007	-0.18235						
12	0.0003	0.01109						
13	0.0051	0.01612						
14	-0.0402	0.01187						
15	0.0086	0.00036						
16	0.0021	0.01185						
17	0.0111	0.06717						
18	0.0008	0.02150						
19	-0.0626	-0.01953						



	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
9	r_m	r_e		Matriz de Coeficiente de correlación				Matriz de Varianza - Covarianza		
10				ρ	r_m	r_e				
11	0.0007	-0.18235		r_m	1					
12	0.0003	0.01109		r_e	0.02344189	1				
13	0.0051	0.01612								
14	-0.0402	0.01187								
15	0.0086	0.00036								
16	0.0021	0.01185								
17	0.0111	0.06717								
18	0.0008	0.02150								
19	-0.0626	-0.01953								
20	-0.0013	0.01958								
21	0.0356	-0.06120								
22	-0.0008	0.00509								
23	0.0070	0.07947								

Matriz de Coeficiente de correlación

ρ	r_m	r_e
r_m	1	
r_e	0.0234418	1

Matriz de Varianza - Covarianza

	$\sigma(r_m)$	$\sigma(r_e)$
$\sigma(r_m)$	0.0004889	
$\sigma(r_e)$	0.00002796	0.00291117

e) Cálculo del coeficiente beta(β)

$$\beta_e = \frac{COV\ (r_e, r_m)}{Var\ (r_m)}$$

$$\beta_e = \frac{0.00002796}{0.0004889} = 0.05720$$

f) Riesgo país (r_m)

- ✓ El riesgo país se cálculo por el método *Country debt spread* que es 1.90%.
- ✓ EMBI + PERÚ = 1.90%

g) Cálculo de la rentabilidad exigida por las acciones

$$r_e = r_f + \beta_e (r_m - r_f) + r_p$$

$$r_e = 0.0038 + 0.057203 * (0.0057 – 0.0038) + 0.019$$

$$r_e = 2.29\%$$

- ✓ Rentabilidad anual exigida por los accionistas

$$\boxed{r_e = 27.49\%}$$

El Modelo de Markowitz

El Modelo de Harry Markowitz fue publicado en 1952, en la revista *Journal of Finance,* este artículo llamado "**Portfolio Selection**" planteaba un modelo de conducta racional para la selección de carteras de títulos-valores con liquidez inmediata.

Subsiguientemente en 1959, publica el libro ***"porfolio selection, Efficient Diversification of Investments"***, desde este momento revoluciono la economía financiera , pues su modelo es el más exitoso teóricamente, del cual sean derivado múltiples trabajos. El libro sienta las base de la diversas teorías de equilibrio en el mercado de activos financieros.

Sin embargo hay que mencionar que su aplicación practica no ha tenido el mismo éxito teórico. Esto se debe a la complejidad matemática si se aplica para "n" activos, por que al ser un programa cuadrático paramétrico, su algoritmo de resolución era muy complejo. También el número de estimaciones de rentabilidad, varianza y covarianza es muy elevado.

Retorno Esperado de un Activo

El retorno esperado, se debe evaluar por las distintas probabilidades de ocurrencia que pude llegar a tener en el futuro el activo de mercado.

Este rendimiento esperado se calcula a través de la sumatoria del producto de cada probabilidad por el rendimiento del activo que le corresponde.

$$E\left(R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_{r_i} . R_i$$

Donde:

$E(R_i)$: Retorno esperado del activo R_i.

P_{ri}: Probabilidad de ocurrencia.

R_i: Retorno del activo R_i.

Retorno Esperado del Portafolio

El retorno esperado de una cartera de activos es igual al promedio ponderado de los activos que lo componen.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i . E(R_i)$$

Donde:

R_p: Retorno esperado del portafolio.

w_i: Proporción del activo

$E(R_i)$: Retorno esperado del activo i.

$$1 = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

Ejemplo si tengo 10 valores y en cada uno tiene la misma proporción entonces el $w_i = 1/10 = 0.1$

Riesgo

El riesgo generalmente es medido como la desviación estándar de sus retornos. Esto quiere el grado en que los retornos de un activo se dispersan del promedio esperado del mismo.

Este grado en que los activos son afectados por determinados hechos que tiene implicancia en el riesgo del portafolio.

Riesgo de un Activo

Este riesgo es medido como la desviación estándar de los retornos del activo.

$$\sigma\left(R_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - E\left(R_i\right)\right)^2 . P_{r_i}}$$

$\sigma(R_i)$: Desviación estándar del activo i.

Riego del Portafolio

El riesgo del portafolio esta en función del nivel de riesgo individual de cada uno de los activos que lo componen y también del grado de correlación existente entre los retornos esperados de cada activo de la cartera.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - E(R_i)\right)^2 . P_{r_i}$$

Covarianza de los Retornos

Una expresión más usada, para constituir la cartera es la siguiente expresión:

$$\sigma_p^2 = (w_i \sigma_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j}^{k} w_i w_j Cov\left(R_i, R_j\right)$$

- Si fueran dos activos A y B, el riesgo de la cartera seria:

$$\sigma_p^2 = (w_A \sigma_A)^2 + (w_B \sigma_B)^2 + 2 w_A w_B Cov(R_A, R_B)$$

- Si fueran tres activos A, B y C el riesgo de la cartera seria:

$$\sigma_p^2 = (w_A \sigma_A)^2 + (w_B \sigma_B)^2 + (w_C \sigma_C)^2 + 2 w_A w_B Cov(R_A, R_B) +$$
$$2 w_A w_C Cov(R_A, R_C) + 2 w_B w_C Cov(R_B, R_C)$$

- Si fueran cuatro activos A, B, C y D el riesgo del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = (w_A \sigma_A)^2 + (w_B \sigma_B)^2 + (w_C \sigma_C)^2 + (w_D \sigma_D)^2 + 2 w_A w_B Cov(R_A, R_B) +$$
$$2 w_A w_C Cov(R_A, R_C) + 2 w_A w_D Cov(R_A, R_D) + 2 w_B w_C Cov(R_B, R_C) +$$
$$2 w_B w_D Cov(R_B, R_D) + 2 w_C w_D Cov(R_C, R_D)$$

Matriz de Varianza - Covarianza

$$VAR-COV=\begin{bmatrix} \sigma^2_{R_1} & Cov(R_1,R_2) & \cdots & Cov(R_1,R_n) \\ Cov(R_2,R_1) & \sigma^2_{R_2} & \cdots & Cov(R_2,R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(R_n,R_1) & Cov(R_n,R_2) & \cdots & \sigma^2_{R_n} \end{bmatrix}$$

Matriz de Correlaciones

$$COR=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{R_1,R_2} & \cdots & \rho_{R_1,R_n} \\ \rho_{R_2,R_1} & 1 & \cdots & \rho_{R_2,R_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{R_n,R_1} & \rho_{R_n,R_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{R_iR_j}=\frac{Cov(R_i,R_j)}{\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}$$

Covarianza

El riesgo de un portafolio dependerá de la extensión por la cual los activos son análogamente afectados por eventos subyacentes.

$$Cov\ (R_i, R_j) = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{k} \left(R_i - \overline{R}_i\right)\left(R_j - \overline{R}_j\right).P_i$$

La covarianza de dos activos podría ser positiva o negativa y será cercana a cero si el desvío de los retornos de cada uno de los activos se encuentra incorrelacionados.

Donde:

$\overline{R}_i$: Es la rentabilidad promedio del activo i.

$\overline{R}_j$: Es La rentabilidad promedio del activo j.

P_i : Es la probabilidad del activo i.

Coeficiente de Correlación

Nos da una idea de la dirección de la relación que existente entre dos o más activos, Estandarizando la covarianza todos los valores de correlación estarán comprendidos entre -1 y +1 llegando a lo que se nombra como coeficiente de correlación.

$$\rho_{R_i R_j} = \frac{Cov\ (R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} \sigma_{R_j}}$$

Podemos expresar el riesgo del portafolio en función de la correlación de sus activos:

$$\sigma_p^2 = (w_i \sigma_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j}^{k} w_i w_j \rho_{R_i, R_j} \sigma_{R_i} \sigma_{R_j}$$

El Portafolio de Mínimo Riesgo

La proporción del activo riesgoso "i" que minimiza:

$$w_{\min\, i} = \frac{\sigma_j^2 - \rho_{R_i,R_j}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}{\sigma_{R_i}^2 + \sigma_{R_j}^2 - 2\rho_{R_i,R_j}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}$$

El Portafolio Óptimo Riesgoso

$$w_i = \frac{[E(R_i)-R_{LR}]\sigma_{R_j}^2 - [E(R_j)-R_{LR}]\rho_{\sigma_{R_j},\sigma_{Ri}}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}{[E(R_i)-R_{LR}]\sigma_{R_j}^2 + [E(R_j)-R_{LR}]\sigma_{R_i}^2 - [E(R_i)-R_{LR}+E(R_j)-R_{LR}]\rho_{\sigma_{R_j},\sigma_{Ri}}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}$$

Línea de Balance de Riesgo del Activo Esperado

$$E\left(R_i\right) = \frac{\left[E\left(R_j\right) - R_{LR}\right].\sigma_P}{\sigma_{R_j}} + R_{LR}$$

$$Inter\sec ción = R_{LR}$$

Pendiente

$$\frac{E\left[R_M\right] - R_{LR}}{\sigma_{R_M} - \sigma_{R_{LR}}}$$

$$R_{P_i} = Intersección + pendiente * \sigma_{P_i}$$

$$\sigma_{P_i} = Paso + \sigma_{P_{i-1}}$$

$$Paso = \frac{\sigma_M - \sigma_{R_{LR}}}{k-1}$$

Donde:

R_{LR} : Tasa libre de riesgo.

σ_{RLR}: Desviación libre de riesgo.

σ_P : Desviación del portafolio.

k: Representa un portafolio cualquiera.

Diversificación

La diversificación puede ayudar a los inversores a pondera el riesgo de los activos; pero no reduce el riesgo del portafolio. Esto significa invertir los activos en diferentes sectores donde los retornos no están directamente relacionados la mayoría del tiempo, con el objetivo de reducir el riesgo.

Si la correlación es perfectamente positiva ($\rho_{Ri,Rj}$ = 1), entonces el riego de dos activos i y j es:

$$\boxed{1.\sigma_{R_i}\sigma_{R_j} = Cov(R_i, R_j)}$$

$$\rho_{R_i R_j} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}} \Rightarrow \rho_{R_i R_j}\left(\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}\right) = Cov(R_i, R_j)$$

$$\sigma_P^2 = \left(w_i\sigma_{R_i}\right)^2 + \left(w_j\sigma_{R_j}\right)^2 + 2w_i w_j.Cov\left(R_i, R_j\right)$$

$$\sigma_P^2 = \left(w_i\sigma_{R_i}\right)^2 + \left(w_j\sigma_{R_j}\right)^2 + 2w_i w_j.\sigma_{R_i}\sigma_{R_j} \cdots$$ (Binomio al cuadrado)

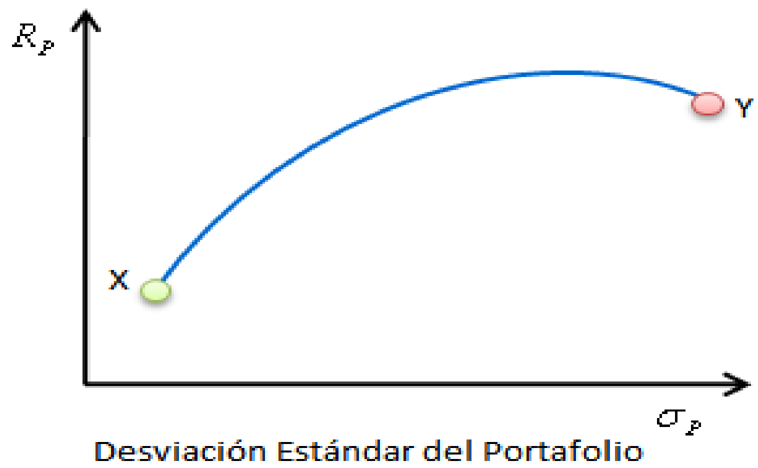
$$\boxed{\sigma_P^2 = \left(w_i\sigma_{R_i} + w_j\sigma_{R_j}\right)^2}$$

La Frontera Eficiente

Para un portafolio se constituyen variando el porcentaje invertido en cada uno de los activos que la componen.

Un inversionista racional le interesa un portafolios que ofrezcan el máximo retorno esperado dado un nivel de riesgo, o el mínimo riesgo dado un nivel de retorno esperado. A este portafolio o cartera se le denominados eficientes y están sobre una curva llamada Frontera eficiente.

El área sobre la curva XY representa la variedad del portafolios eficientes que pueden ser construidas con estos activos.



- Aplicando el Modelo de Markovitz a nuestro ejercicio donde tenemos los precios de las acciones de la Empresa Ferreyros y Edelnor.
- Los rendimientos de los precios de las acciones serán calculados por:

$$R_{t-1} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Fecha de Cotización	Precio x acción	
	Ferreyros(B)	Edelnor(D)
04/12/2025	6.59	6.56
03/12/2025	6.57	6.53
02/12/2025	6.55	6.51
………………	…………………	………………
11/01/2025	3.41	3.39
10/01/2025	3.36	3.34
09/01/2025	3.33	3.31

Rendimientos	
R(B)	R(D)
0.30%	0.38%
0.31%	0.33%
……………………	………………
1.47%	0.55%
1.49%	1.50%
0.90%	0.91%

Ahora necesitamos construir una matriz, que contenga; el rendimiento promedio, la varianza, la desviación estándar, la covarianza y la correlación de las acciones.

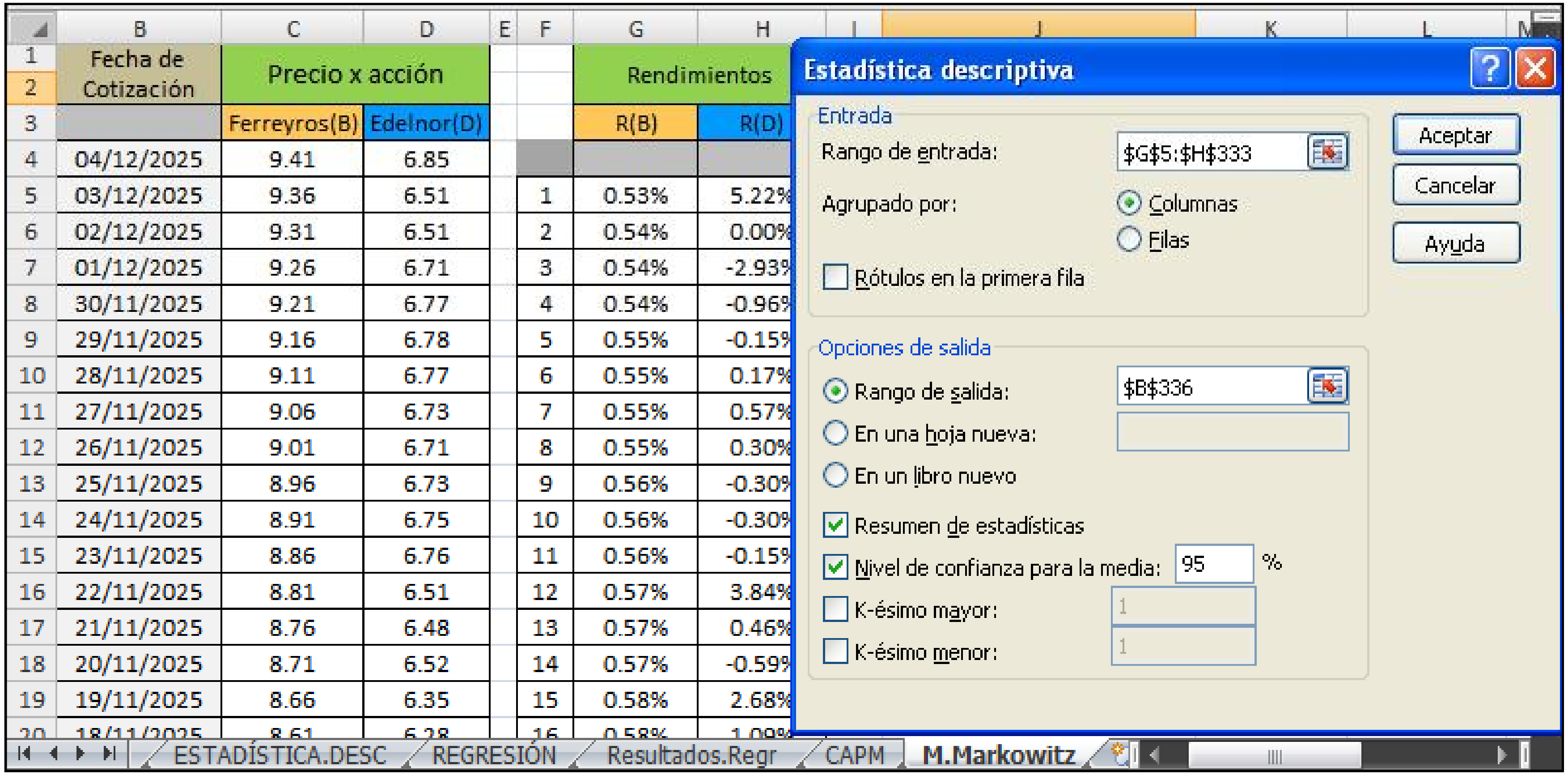
Usando las herramientas de Excel se construye la estadística descriptiva. Pero hay que recordar que la matriz que presenta Excel, tiene más información, por lo que eliminaremos toda aquella información innecesaria para nuestro modelo.®

Una acotación adicional es que la varianza, como la desviación que presenta esta matriz es de la muestra y no de la población como necesitamos, esto será corregida con la fórmula:

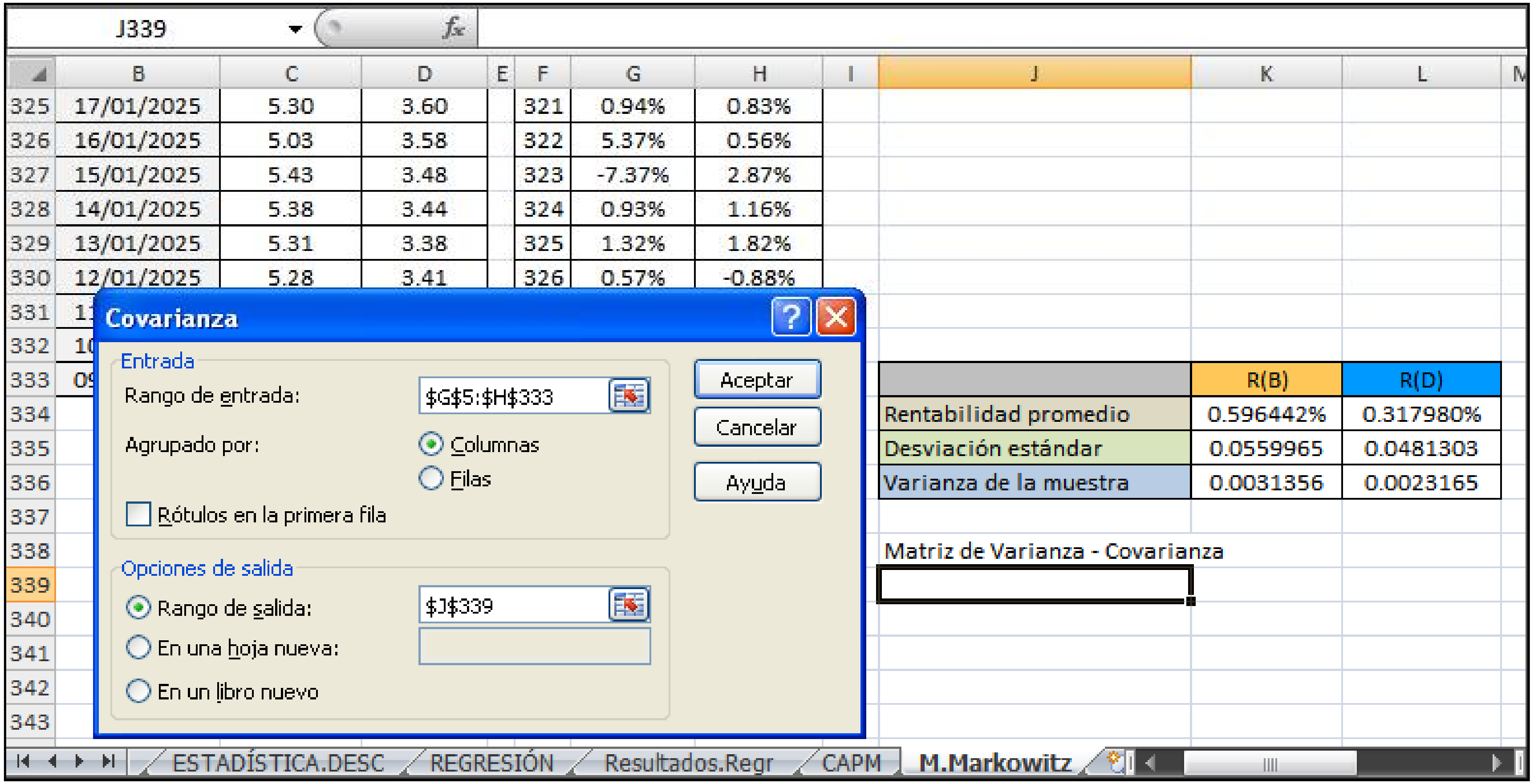
VarP(X): Varianza Poblacional.
VarM(X): Varianza de la muestra.

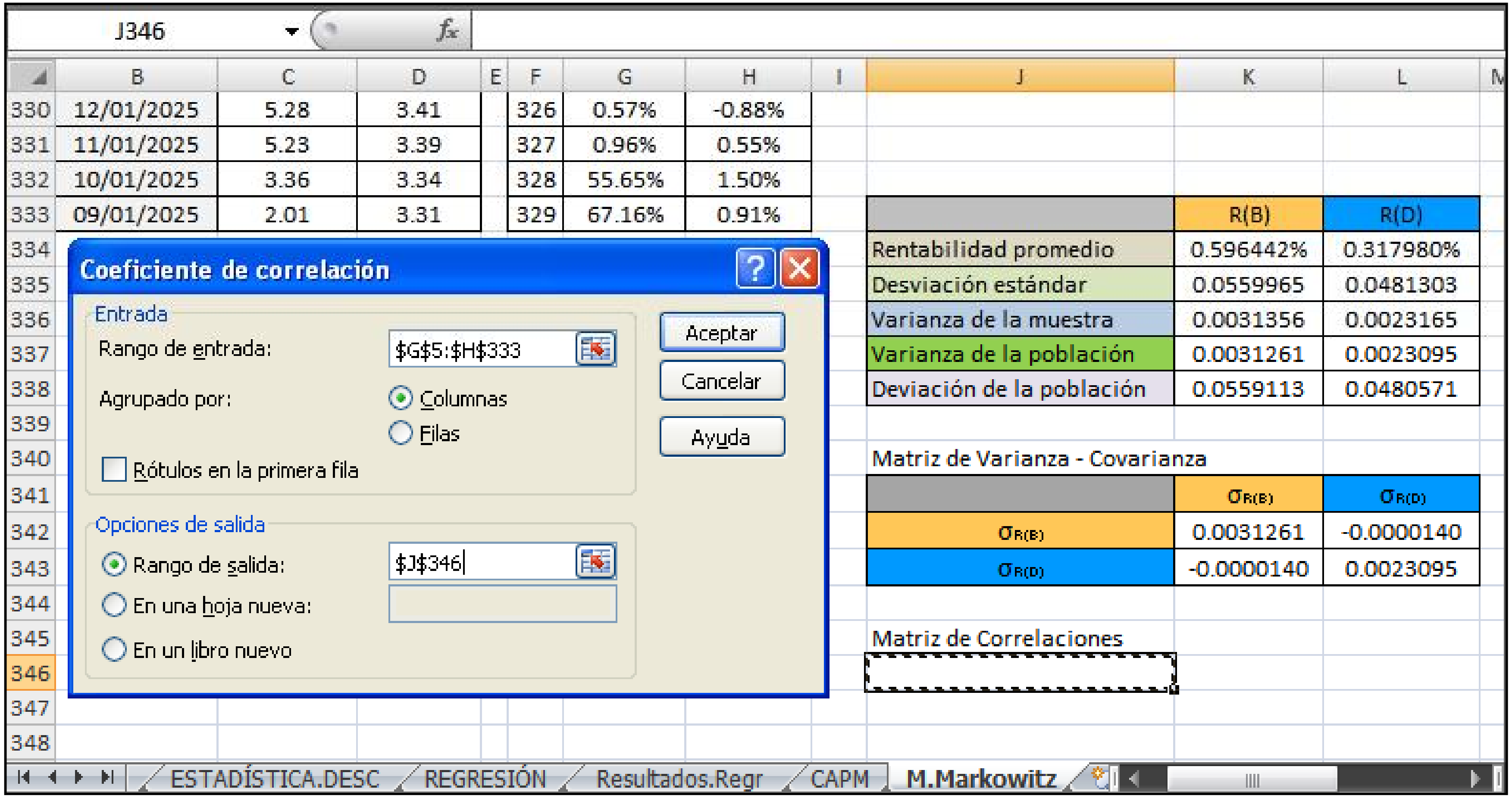
$$\boxed{VarP(x) = \frac{n-1}{n} VarM(x)}$$

® Para mayor detalle sobre el uso de estas herramientas en Excel, puede dirigirse a: Antunez Irgoin, Cesar.H (2011). "Finanzas en Excel". http://eumed.net/cursecon/ppp/



Fecha de Cotización	Precio x acción			Rendimientos	
	Ferreyros(B)	Edelnor(D)		R(B)	R(D)
04/12/2025	9.41	6.85			
03/12/2025	9.36	6.51	1	0.53%	5.22%
02/12/2025	9.31	6.51	2	0.54%	0.00%
01/12/2025	9.26	6.71	3	0.54%	-2.93%
30/11/2025	9.21	6.77	4	0.54%	-0.96%
29/11/2025	9.16	6.78	5	0.55%	-0.15%
28/11/2025	9.11	6.77	6	0.55%	0.17%
27/11/2025	9.06	6.73	7	0.55%	0.57%
26/11/2025	9.01	6.71	8	0.55%	0.30%
25/11/2025	8.96	6.73	9	0.56%	-0.30%
24/11/2025	8.91	6.75	10	0.56%	-0.30%
23/11/2025	8.86	6.76	11	0.56%	-0.15%
22/11/2025	8.81	6.51	12	0.57%	3.84%
21/11/2025	8.76	6.48	13	0.57%	0.46%
20/11/2025	8.71	6.52	14	0.57%	-0.59%
19/11/2025	8.66	6.35	15	0.58%	2.68%
18/11/2025	8.61	6.28	16	0.58%	1.09%


J339
B C D E F G H I J K L
325 17/01/2025 5.30 3.60 321 0.94% 0.83%
326 16/01/2025 5.03 3.58 322 5.37% 0.56%
327 15/01/2025 5.43 3.48 323 -7.37% 2.87%
328 14/01/2025 5.38 3.44 324 0.93% 1.16%
329 13/01/2025 5.31 3.38 325 1.32% 1.82%
330 12/01/2025 5.28 3.41 326 0.57% -0.88%
Covarianza
Entrada
Rango de entrada: $G$5:$H$333
Agrupado por: Columnas
Filas
Rótulos en la primera fila
Opciones de salida
Rango de salida: $J$339
En una hoja nueva:
En un libro nuevo
Aceptar
Cancelar
Ayuda
R(B) R(D)
Rentabilidad promedio 0.596442% 0.317980%
Desviación estándar 0.0559965 0.0481303
Varianza de la muestra 0.0031356 0.0023165
Matriz de Varianza - Covarianza
ESTADÍSTICA.DESC REGRESIÓN Resultados.Regr CAPM M.Markowitz


J346
fx
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
330 12/01/2025 5.28 3.41 326 0.57% -0.88%
331 11/01/2025 5.23 3.39 327 0.96% 0.55%
332 10/01/2025 3.36 3.34 328 55.65% 1.50%
333 09/01/2025 2.01 3.31 329 67.16% 0.91%
Coeficiente de correlación
Entrada
Rango de entrada:
$G$5:$H$333
Agrupado por:
Columnas
Filas
Rótulos en la primera fila
Opciones de salida
Rango de salida:
$J$346
En una hoja nueva:
En un libro nuevo
Aceptar
Cancelar
Ayuda
R(B)
R(D)
Rentabilidad promedio 0.596442% 0.317980%
Desviación estándar 0.0559965 0.0481303
Varianza de la muestra 0.0031356 0.0023165
Varianza de la población 0.0031261 0.0023095
Deviación de la población 0.0559113 0.0480571
Matriz de Varianza - Covarianza
σR(B)
σR(D)
σR(B) 0.0031261 -0.0000140
σR(D) -0.0000140 0.0023095
Matriz de Correlaciones
ESTADÍSTICA.DESC
REGRESIÓN
Resultados.Regr
CAPM
M.Markowitz

	R(B)	R(D)
Rentabilidad Promedio	0.596442%	0.317980%
Desviación estándar	0.0559965	0.0481303
Varianza de la muestra	0.0031356	0.0023165
Varianza de la población	0.0031261	0.0023095
Deviación de la población	0.0559113	0.0480571

Tabla Resumen

	B	D
R(.)	0.5964%	0.3180%
σ(.)	0.0031	0.0023
ρ(.)	-0.0052	
R_{LR}	2.5%	

Matriz de Varianza - Covarianza

	$\sigma_{R(B)}$	$\sigma_{R(D)}$
$\sigma_{R(B)}$	0.0031261	-0.0000140
$\sigma_{R(A)}$	-0.0000140	0.0023095

Matriz de Correlaciones

ρ	R(B)	R(D)
R(B)	1	-0.005198
R(D)	-0.005198	1

Construcción de la Frontera Eficiente

Para construir nuestro portafolio eficiente, tenemos que tomar el criterio de Media Varianza, la construcción de un portafolio implica determinar que proporción asigna a cada una de los activos para obtener la eficiencia del portafolio.

Supuestos:

✓ Dado el riesgo de la cartera hay que maximizar el rendimiento esperado (Max R_p).

✓ Dado el retorno esperado hay que minimizar el riesgo (Min σ_P).

✓ La venta al descubierto son irrestrictas.

1) Para hallar el portafolio de mínimo riesgo, tenemos que operar el sistema lineal dado por:

$$\boxed{W^* = C^{-1}.B^*}$$

C*: Es la matriz de varianzas y covarianzas aumentada.

B*: Vector de términos independientes.

W*: Matriz de incógnitas (ponderaciones de los activos).

R: Matriz de Rendimiento de los activos.

$$C^* = \begin{bmatrix} \sigma^2_{R_1} & \cdots & \sigma_{R_1,R_i} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{R_1,R_i} & \cdots & \sigma^2_{R_i} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad W^* = \begin{bmatrix} w_{R_1} \\ \vdots \\ w_{R_i} \\ Des/2 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Con los datos de nuestro ejercicio tenemos:

$$C = \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 & 1 \\ -0.00001 & 0.00231 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad W^* = \begin{bmatrix} w^*_B \\ w^*_D \\ Des/2 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0.59644\% \\ 0.31798\% \end{bmatrix}$$

✓ Para hallar la inversa de la matriz C, primero seleccionaremos la celda R338:T340, seguidamente aplacaremos la formula MINVERSA y para finalizar presionaremos Ctrl + Shift + Intro.

SUMA =MINVERSA(R334:T336)

	R(B)	R(D)
Rentabilidad promedio	0.59644%	0.31798%
Desviación estándar	5.59965%	4.81303%
Varianza de la muestra	0.31356%	0.23165%
Varianza de la población	0.31261%	0.23095%
Deviación de la población	5.59113%	4.80571%

$$W^* = \begin{pmatrix} W_B \\ W_D \\ Des/2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0.0031261 & -0.000014 & 1 \\ -0.00001 & 0.002309 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \text{34:T336)}$$

R348 {=MMULT(R344:T346;U344:U346)}

$\sigma_{R(B)}$	0.00313	-0.00001
$\sigma_{R(D)}$	-0.00001	0.00231

Matriz de Correlaciones

p	R(B)	R(D)
R(B)	1	-0.005198
R(D)	-0.005198	1

Tabla Resumen

$$w^* = C^{-1}.B^*$$

$$\begin{pmatrix} W_B \\ W_D \\ Des/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183.0329 & -183.033 & 0.42527 \\ -183.0329 & 183.0329 & 0.57473 \\ 0.425269 & 0.574731 & -0.0013 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_B \\ W_D \\ Des/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42.53\% \\ 57.47\% \\ -0.001321 \end{pmatrix}$$

$$W^{*} = C^{-1}.B^{*}$$

$$\begin{pmatrix} w_B^{*} \\ w_D^{*} \\ Des/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183.03 & -183.03 & 0.4252 \\ -183.03 & 183.03 & 0.5747 \\ 0.4252 & 0.5747 & -0.0013 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_B^{*} \\ w_D^{*} \\ Des/2 \end{pmatrix} = . \begin{pmatrix} 42.53\% \\ 57.47\% \\ -0.00132 \end{pmatrix}$$

- Comprobando los resultados con la formula:

$$w_B^{*} = \frac{\sigma_D^2 - Cov(R_B, R_D)}{\sigma_B^2 + \sigma_D^2 - 2 * Cov(R_B, R_D)}$$

$$w_B^* = \frac{0.00231 - (-0.00001)}{0.00231 + 0.00313 - 2(-0.00001)} = 0.4253$$

$$w_D^* = 1 - w_B^* = 1 - 0.4253 = 0.5747$$

✓ Esto nos quiere decir que para obtener el mínimo riesgo debo que adquirir una proporción del 42.53% de las acciones de la empresa B y un 57.47% de la empresa D.

- Para obtener el retornó esperado del portafolio

Debemos multiplicar la transpuesta de las proporciones de los activos por el rendimiento o rentabilidad promedio.

$$R_P = w_1.E(R_1) + w_2.E(R_2) + w_3.E(R_3) + \ldots w_n.E(R_n)$$

$$\boxed{R_P = w^t.R}$$

$$R_P = w^t.R$$

$$R_P = \begin{bmatrix} 0.4253 & 0.5747 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.59644\ \% \\ 0.31798\ \% \end{bmatrix}$$

$$R_P = 0.44\%$$

Donde:

$$w = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_n^* \end{bmatrix}$$

- Para obtener el riesgo del portafolio

Debemos multiplicar la transpuesta de las proporciones de los activos por la matriz *V* y por la matriz de proporciones de los activos.

$$\sigma_P^2 = w_B^* \sigma_B^2 + w_D^* \sigma_D^2 + 2 w_B^* w_D^* .Cov(R_B, R_D)$$

$$\boxed{\sigma_P^2 = w^t .V .w}$$

$$\sigma_P^2 = w^t.V.w$$

$$\sigma_P^2 = \begin{bmatrix} 0.42526 & 0.57473 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 \\ -0.00001 & 0.00231 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.42526 \\ 0.57473 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_P^2 = 0.13\%$$

Donde:

V: Es la matriz de varianzas y covarianzas

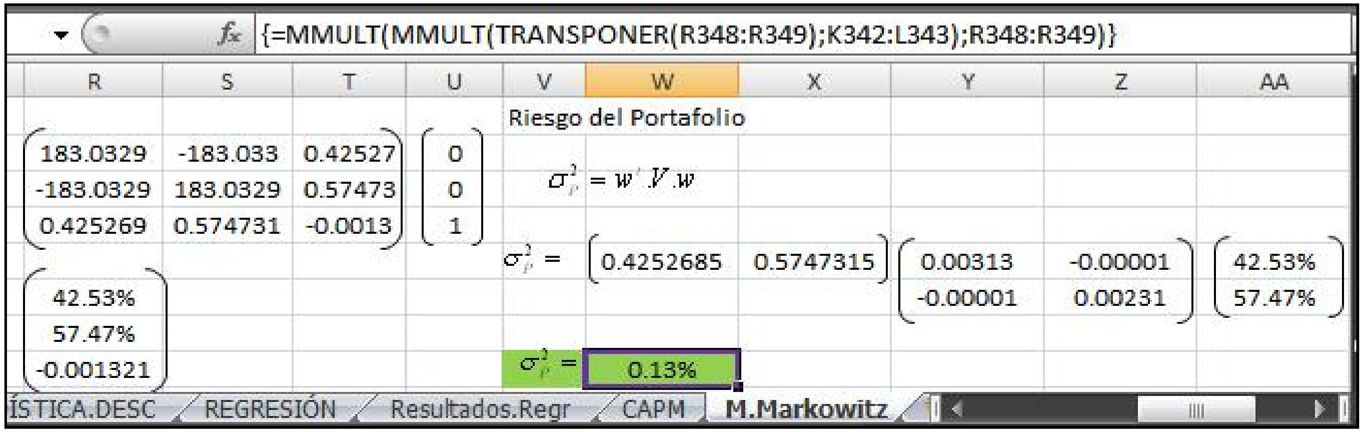
$$v = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & Cov(R_1, R_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(R_n, R_1) & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

✓ Un método practico para multiplicar todo de un solo procedimiento consiste en usar la formula:

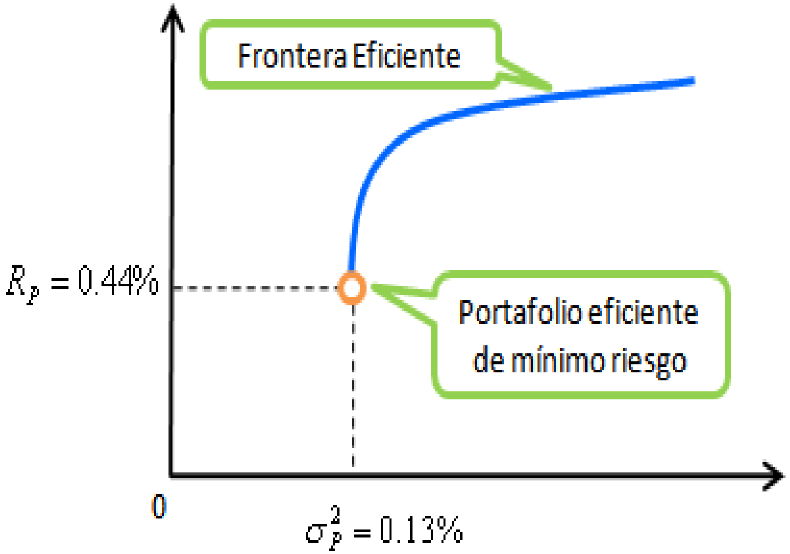
σ_P^2 =MMULT(MMULT(TRANSPONER(R348:R349);K342:L343);R348:R349)

y seguidamente de Ctrl + Shift + Intro.

$$\sigma_P^2 = 0.13\%$$



Con el rendimiento esperado y la varianza de mínimo riego, representan el punto inicial de la frontera eficiente.



Para obtener las demás carteras eficiente

Para obtener las demás carteras eficientes a partir de la cartera de mínimo riego necesitamos aplicar la formula:

$$\boxed{W'^{*} = C'^{-1}.B'^{*}}$$

$$C' = \begin{bmatrix} V & R & 1 \\ R & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad W'^{*} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ Var/2 \\ Var2/2 \end{bmatrix} \qquad B'^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R'_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Con los datos de nuestro ejercicio tenemos:

$$C' = \begin{bmatrix} \sigma_B^2 & Cov(R_B, R_D) & E(R_B) & 1 \\ Cov(R_B, R_D) & \sigma_D^2 & E(R_D) & 1 \\ E(R_B) & E(R_D) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad W' = \begin{bmatrix} w_B \\ w_D \\ Var/2 \\ Var2/2 \end{bmatrix}$$

- Si nuestro rendimiento esperado del portafolio es de 0.5% → $R'_P = 0.5\%$

$$C' = \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 & 0.00596 & 1 \\ -0.00001 & 0.00231 & 0.00318 & 1 \\ 0.00596 & 0.00318 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.005 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W'^{*} = C'^{-1}.B'^{*}$$

$$\begin{bmatrix} w_B \\ w_D \\ Var/2 \\ Var\,2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 & 0.00596 & 1 \\ -0.00001 & 0.00231 & 0.00318 & 1 \\ 0.00596 & 0.00318 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.005 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓ El portafolio óptimo riesgoso es 65.37% para las acciones de *B* y 34.63% para las acciones de *D*. Estos resultados puede comprobarse con la fórmula de la guía positiva 24.

$$W'^{*} = \begin{bmatrix} 0.6537 \\ 0.3463 \\ -0.448 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$w_B = 65.37\%$$

$$w_D = 34.63\%$$

- El Riesgo del portafolio con un rendimiento esperado de $R'_P = 0.5\%$

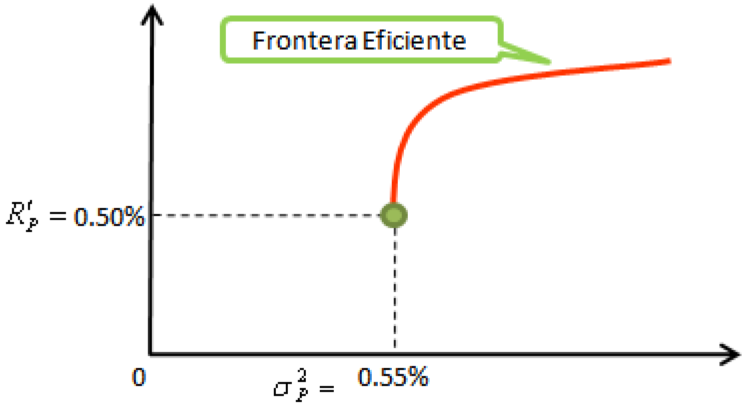
$$\boxed{\sigma_P^2 = w'^t . V . w'}$$

σ_P^2 =MMULT(MMULT(TRANSPONER(AC352:AC353);K342:L343);AC352:AC353)
y seguidamente de Ctrl + Shift + Intro.

$$\sigma_P^2 = \begin{bmatrix} 0.6537 & 0.3463 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 \\ -0.00001 & 0.00231 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.654 \\ 0.346 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_P^2 = 0.16\%$$

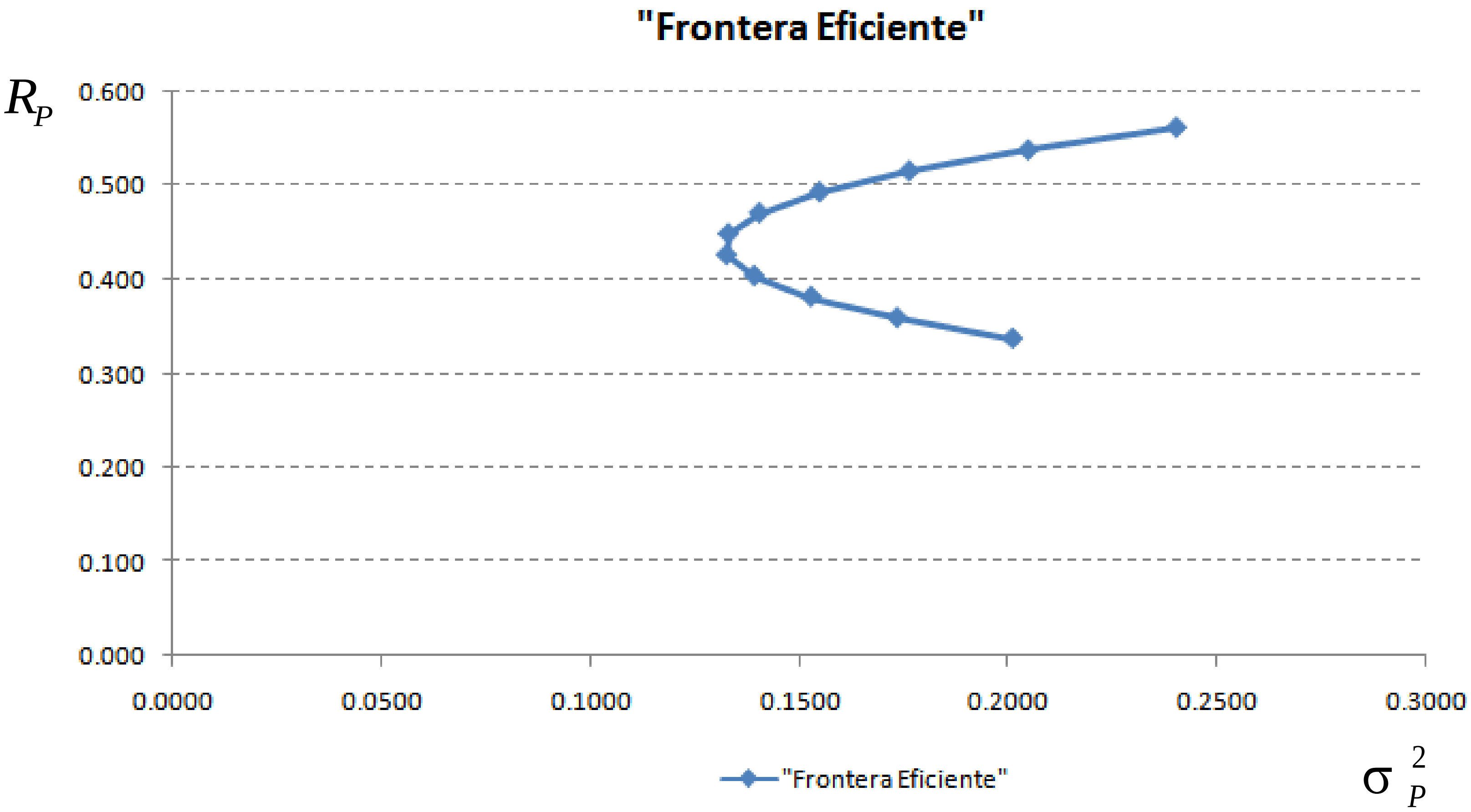
✓ De este modo hemos encontrado un punto inicial de otra cartera eficiente cuyo rendimiento es 0.5% y riesgo es de 0.16%.



✓ Para crear una simulación de la frontera eficiente se puede repetir los pasos de la guía positiva 43; donde aumentamos la rentabilidad esperada que se encuentra ubicada en la matriz B'*.

PORTAFOLIO EFICIENTE

Portafolio	w_B	w_D	σ_P	$Var(R_P)$	R_P
1	0.95	0.05	0.5316	0.2826	0.006
2	0.87	0.13	0.4901	0.2402	0.562
3	0.79	0.21	0.4525	0.2048	0.538
4	0.71	0.29	0.4200	0.1764	0.516
5	0.63	0.37	0.3937	0.1550	0.493
6	0.55	0.45	0.3750	0.1406	0.471
7	0.47	0.53	0.3650	0.1332	0.449
8	0.39	0.61	0.3644	0.1328	0.427
9	0.31	0.69	0.3734	0.1394	0.404
10	0.23	0.77	0.3912	0.1530	0.382
11	0.15	0.85	0.4165	0.1735	0.360
12	0.07	0.93	0.4484	0.2011	0.338



✓ Existe también otro método como generar la frontera eficiente que es aumentado o disminuyendo la ponderación de cada cartera:

✓ Este método consiste en disminuir la ponderación del activo B, en 5% hasta cero y para el caso del activo D ir incrementando la ponderación en 5% hasta llegar al valor de 100%.

✓ Los rendimientos de cada portafolio se puede obtenen aplicando la fórmula de rendimiento esperado del portafolio.

✓ En esta ocasión obtendremos una medida de riesgo como es la desviación del portafolio, y esto con la finalidad que los puntos de la curva no sean tan dispersos.

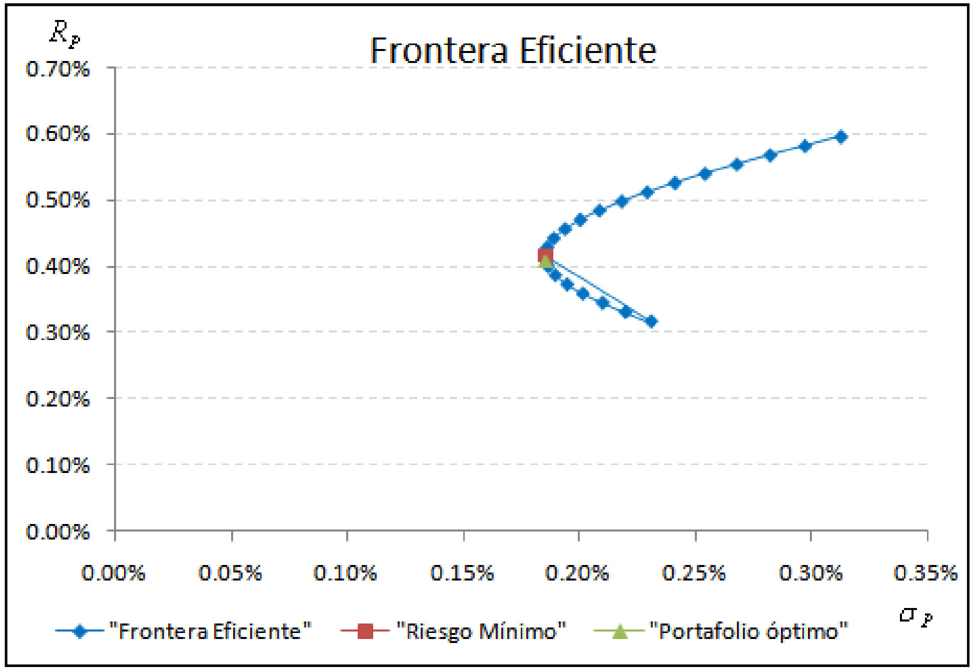
✓ Y como ultimo paso se graficará (gráfico de dispersión) la medida de riesgo(σ_p) y el rendimiento del portafolio(R_p).

Portafolio	W_B	W_D	R(p)	σ(p)
1	100%	0%	Fórmula de rendimiento	Fórmula de riesgo
2	1-5%	0+5%		

Portafolio	W_B	W_D	R(p)	σ(p)
1	1.00	0.00	0.60%	0.31%
2	0.95	0.05	0.58%	0.30%
3	0.90	0.10	0.57%	0.28%
4	0.85	0.15	0.55%	0.27%
5	0.80	0.20	0.54%	0.25%
6	0.75	0.25	0.53%	0.24%
7	0.70	0.30	0.51%	0.23%
8	0.65	0.35	0.50%	0.22%
9	0.60	0.40	0.49%	0.21%
10	0.55	0.45	0.47%	0.20%
11	0.50	0.50	0.46%	0.19%
12	0.45	0.55	0.44%	0.19%
13	0.40	0.60	0.43%	0.19%
14	0.35	0.65	0.42%	0.19%
15	0.30	0.70	0.40%	0.19%
16	0.25	0.75	0.39%	0.19%
17	0.20	0.80	0.37%	0.19%
18	0.15	0.85	0.36%	0.20%
19	0.10	0.90	0.35%	0.21%
20	0.05	0.95	0.33%	0.22%
21	0.00	1.00	0.32%	0.23%
22	0.35	0.65	0.42%	0.19%
23	0.32	0.68	0.41%	0.19%

Tabla Resumen

	B	D
R(.)	0.5964%	0.3180%
σ(.)	0.0031	0.0023
ρ(.)	-0.0052	
R_{LR}	2.5%	



Frontera Eficiente con Tasa Libre de Riesgo

Nuestro objetivo es ahora combinar la inversión en la cartera “M” con la inversión en el activo libre de riesgo R_{LR}. Estos dos activos están incorrelacionados debido a que el activo M, es una variable aleatoria y el activo libre de riesgo ($\sigma^2[R_{LR}]=0$) es una constante.

- La rentabilidad esperada de la combinación de estos dos activos es:

$$R_P = w_M.R_M + (1-w_M).R_{LR} \ldots (I)$$

- El riesgo de la cartera de invertir en el activo riesgoso W_M y en el activo libre de riesgo ($1- W_M$).

$$\sigma_P^2 = (w_M\sigma_M)^2 + (1-w_M)^2.\sigma_{LR}^2 + 2\rho_{M,LR}.\sigma_M\sigma_{LR}$$

$$\sigma_P^2 = (w_M\sigma_M)^2 + (1-w_M)^2.0 + 2\sigma_M\sigma_{LR}.0 \rightarrow \sigma_P^2 = w_M^2\sigma_M^2$$

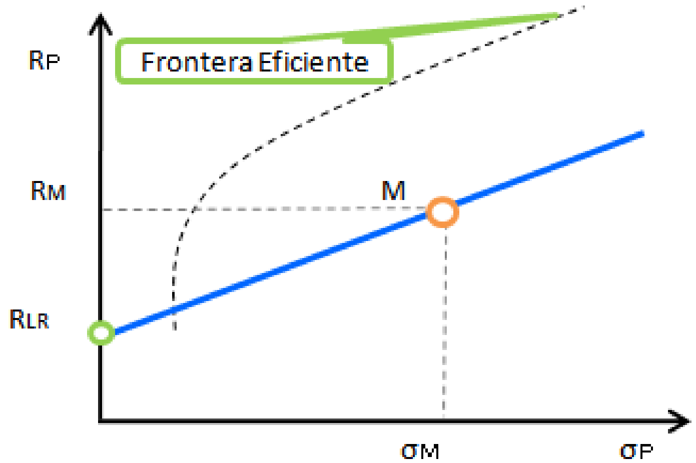
$$\boxed{w_M = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \ldots (II)}$$

Reemplazando la ponderación encontrada (I) en la rentabilidad esperada (II) tenemos:

$$R_P = \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_P}\right).R_M + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_P}\right).R_{LR}$$

$$\boxed{R_P = \left(\frac{R_M - R_{LR}}{\sigma_M}\right).\sigma_P + R_{LR}}$$

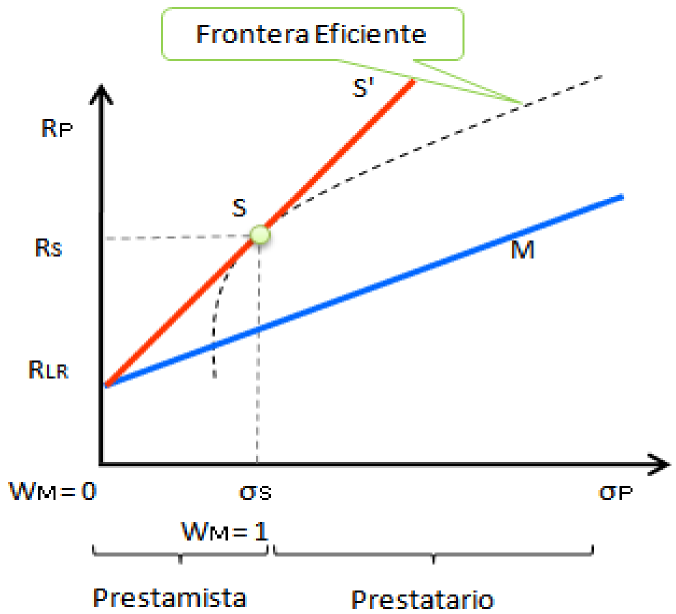
✓ La ecuación anterior representa la ecuación de una recta Rp = α.σp + β, con parámetros alfa y beta; entonces podemos encontrar los puntos. Como la recta pasa por el punto M, hemos encontrado la nueva frontera eficiente.



* Si $W_M=0 \rightarrow R_P=R_{LR}$ y $\sigma_P=0$ ○
* Si $W_M=1 \rightarrow R_P=R_M$ y $\sigma_P= \sigma_M$ ○

✓ Si el inversor se convierte en prestamista, si la cartera que elige se encuentra en la recta “$R_{LR}S$”, en cambio si se ubica en la recta “$R_{LR}M$” se convierte en prestatario.

✓ Si el inverso es prestamista, una porción de su dinero lo presta a una tasa libre de riesgo y el resto lo invierte en el portafolio S.



✓ Si el inverso es prestatario toma dinero prestado a una tasa libre de riesgo, y lo va invertir en el portafolio S.

Tasa Libre de Riesgo que tomo prestado o presto no son iguales

En este caso vamos analizar cuando tomo prestado o presto no son iguales, para esto tenemos el supuesto que pedimos prestado y prestamos a una tasa libre de riesgo.

- Para hallar la cartera S, tenemos que el sistema de ecuaciones:

$$V.Z = R - F$$

$$\boxed{Z = V^{-1}.(R - F)}$$

Donde:

V: Representa la matriz de varianza – covarianza

Z: Es el vector columna de incógnitas.

R: Es la matriz de rendimientos esperados de los activos.

F: Es el vector columna cuyos componentes son la tasa R_{LR}.

- Los elementos de las matrices son:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma^2_{R_1} & \cdots & \sigma_{R_1,Rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{R_1,R_n} & \cdots & \sigma^2_{R_n} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} R_{LR} \\ \vdots \\ R_{LR} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \rightarrow Z' = \begin{bmatrix} W_1 / \sum W_i \\ \vdots \\ W_n / \sum W_i \end{bmatrix} \rightarrow Z' = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

- Con los datos de nuestro ejemplo, resolvemos el sistema de ecuaciones:

Donde R_{LR} = 0.2%

$$Z = V^{-1}.(R - F)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 \\ -0.00001 & 0.00231 \end{bmatrix}^{-1} . \left(\begin{bmatrix} 0.00596 \\ 0.00318 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix} \right)$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1.2705 \\ 0.5185 \end{bmatrix} \rightarrow Z' = \begin{bmatrix} 1.2705 & /1.789 \\ 0.5185 & /1.789 \end{bmatrix} \rightarrow Z' = \begin{bmatrix} 71.02\% \\ 28.98\% \end{bmatrix}$$

$$W = 1.789$$

- Por lo tanto la proporción de los activos es de 71.02% para B(Empresa Ferreyros) y 28.98% para D(Empresa Edelnor).

- La rentabilidad esperada para la cartera S es:

$$R_S = w^t.R$$

$$R_S = \begin{bmatrix} 0.7102 & 0.2898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00596 \\ 0.00318 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{R_S = 0.52\%}$$

- El riesgo del portafolio S es:

$$\sigma_S^2 = w^t.V.w$$

$$\sigma_S^2 = \begin{bmatrix} 0.7102 & 0.2898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00313 & -0.00001 \\ -0.00001 & 0.00231 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7102 \\ 0.2898 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_S^2 = 0.00176 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_S = 4.2\%}$$

- La ecuación de la Frontera Eficiente es:

$$R_P = \left(\frac{R_S - R_{LR}}{\sigma_S} \right) . \sigma_P + R_{LR}$$

$$R_P = \left(\frac{0.52\% - 0.2\%}{4.2\%} \right) . \sigma_P + 0.2\% \quad \rightarrow \quad \boxed{R_P = 7.52\% \sigma_P + 0.2\%}$$

- Si un inversionista exige un Riesgo igual a (σ_N) 1.5%, por lo que se obtiene un rendimiento esperado de la misma y los porcentajes a invertir en S y en R_{LR}.

$$R_P = 7.52\% * 1.5\% + 0.2\% \quad \rightarrow \quad R_S = 0.31\%$$

$$w_N = \frac{\sigma_N}{\sigma_S} \quad \rightarrow \quad w_N = \frac{0.015}{0.04201} \quad \boxed{w_N = 35.7\%}$$

Para determinar los distintos porcentajes a invertir en los 2 activos con:
Riesgo: 35.7%

$$w_N . Z' = 35.7\% \begin{bmatrix} 71.02\% \\ 28.98\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_B \\ w_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.36\% \\ 10.35\% \end{bmatrix}$$

Rendimiento sin Riesgo es:
Sin Riesgo: 64.3%

$$R_N = w_N . R_N + (1 - w_N) . R_{LR} \quad \rightarrow \quad R_S = 0.31\%$$

$$R_N = 64.3\% . 0.52\% + (1 - 64.3\%) . 0.2\% \quad \rightarrow \quad R_N = 0.31\%$$

Para un Retorno esperado de (R_N) 0.31%, tendrá los porcentajes a invertir en N y en R_{LR} :

$$\sigma_N = \left(\frac{R_N - 0.2\%}{7.52\%} \right)$$

$$\sigma_N = \left(\frac{0.31\% - 0.2\%}{7.52\%} \right)$$

$$\sigma_N = \left(\frac{0.31\% - 0.2\%}{7.52\%} \right) \rightarrow \boxed{\sigma_N = 1.5\%}$$

Si variamos los desvíos, obtendremos diferentes puntos de la frontera eficiente como se muestra en la siguiente guía positiva.

R_N	σ_N
0.20%	0.00%
0.31%	1.50%
0.32%	1.61%
0.33%	1.72%
0.34%	1.83%
0.35%	1.94%
0.35%	2.05%
0.36%	2.16%
0.37%	2.27%
0.38%	2.38%
0.39%	2.49%
0.40%	2.60%
0.40%	2.71%