Revista Académica: CONTRIBUCIONES A LA ECONOMÍA
Grupo eumednet

Abril 2016 - ISSN: 1696-8360

SEPARABILIDAD EN LA PRODUCCIÓN CONJUNTA DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Antonio Mora Plaza (2016): "Separabilidad en la producción conjunta de Sraffa", Revista Contribuciones a la Economía (abril-junio 2016). En línea: http://eumed.net/ce/2016/2/sraffa.html

Abstract: All problem about of joint production can be reduced to the follow question: may be to separate the production process that are making the same good and/or the goods maked from the same process? May be calculate the prices of production according the problem indicated previously. For that is necessary to resolve two problems: the first talk us about the information for to do allocation among goods and process; the second have relation with an economic model that have the same number of equations and variables for that the system mathematic model may be solved for to calculate the prices of system.

JEL: B51 / keywords: Sraffa, joint production, economy

Resumen: Casi todo el problema de la producción conjunta se reduce a lo siguiente: ¿es posible hacer explícitos (separar) los procesos que producen el mismo bien y/o los bienes producidos por el mismo proceso de tal forma que se puedan calcular los precios del sistema? Para ello habría que sortear dos obstáculos: el primero es el de información necesaria para poder asignar mercancías a procesos; el segundo es el de llegar a un modelo en el que haya igual número de ecuaciones que de incógnitas para que el sistema en su conjunto sea resoluble en precios. Aquí abordaremos cómo resolver al menos matemáticamente ambos casos de producción conjunta.

I - Un bien, varios procesos

En este epígrafe no vamos a tratar todos los temas, pero al menos abordaremos el problema de separar los procesos que producen un mismo bien. Este epígrafe es también cosecha propia del autor de este manual. Supongamos que partimos de una matriz de información ***B*** de *productos finales originales* de ***m*** filas y ***n*** columnas, pero que sabemos que varios (o todos) los bienes y servicios son producidos por dos procesos diferentes (se puede generalizar). El resultado final es una matriz ***Y*** de tamaño ***m***x***ñ***, donde, en este caso particular, ***ñ***=**2*n***, es decir, el número de *procesos desdoblados* es doble –valga la redundancia– que el de procesos originales. Esta matriz ***Y*** recogería el hecho de hacer explícitos todos los procedimientos que, tomados de dos en dos, producen el mismo bien. Para resolver el problema deberíamos tener una información extraordinariamente precisa mediante una matriz ***n***x***ñ*** tal como ***Z***, donde cada elemento z_{jk} recogería la asignación de cada proceso de cada bien y servicio a su proceso desdoblado correspondiente. Entonces, matemáticamente, el problema sería sencillo de plantear: habría de cumplirse la ecuación matricial:

(1.1)
$$\boxed{\underset{mxn}{B} \times \underset{nx\tilde{n}}{Z} = \underset{mx\tilde{n}}{Y}}$$

donde cada elemento y_{ik} es la resultante del sumatorio de productos:

(1.2)
$$\boxed{y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_{jk} \quad \forall i = 1 \ a \ m \quad y \quad \forall k = 1 \ a \ \tilde{n} \quad con \ m > n}$$

Partimos de la matriz ***B*** de productos finales originales a la reasignación donde las filas indican las distintas mercancías (bienes y servicios) y las columnas los diferentes procesos para obtenerlas:

B = productos finales			sumas
55	75	50	180
210	125	115	450
165	185	130	480
140	65	170	375

Supongamos que por algún procedimiento hubiéramos obtenido la matriz ***Z*** de <u>*re-asignaciones*</u> tal como:

Z = *i(tBxB)xtBxY* = matriz de reasignaciones						
1	2	3	4	5	6	sumas
0,1813	0,1926	-0,1192	0,8187	-0,1926	0,1192	1,0000
0,2939	0,2518	0,6207	-0,2939	0,7482	-0,6207	1,0000
0,3231	-0,0407	0,1211	-0,3231	0,0407	0,8789	1,0000
0,7982	0,4037	0,6227	0,2018	0,5963	0,3773	

donde cada z_{jk} indica el proceso ***j*** de la matriz original ***B*** asignado al proceso ***k***. El resultado del producto ***BZ*** sería la matriz de bienes y servicios (filas) ***m***x***ñ*** reasignadas según el proceso ***k***.

Y = ***B***x***Z*** = productos finales reasignados						
1	2	3	4	5	6	sumas
48,89	20,13	33,56	6,11	29,87	41,44	180,00
111,95	67,24	66,49	98,05	57,76	48,51	450,00
126,27	73,07	110,91	38,73	111,93	19,09	480,00
99,40	36,41	44,25	40,60	28,59	125,75	375,00

Las filas de la matriz ***Y*** siguen siendo los bienes y servicios y las columnas los procesos, con la particularidad de que están desdoblados: las columnas 1 y 4 son los procesos desdoblados correspondientes a la primera columna de la matriz ***B*** de datos originales, las columnas 2 y 5 los son de la columna segunda, y 3 y 6 los de la tercera. Puede observarse que, si se suman estas columnas por cada bien y servicio (filas), obtenemos la matriz original ***B***. Volviendo a la matriz clave ***Z*** de reasignaciones, algunos de sus elementos son negativos porque recogen la posibilidad de que hubiera que sacar la asignación del proceso ***j*** del proceso ***k*** por no corresponderle. No obstante, siempre es recomendable en casos como el de la matriz de reasignaciones -donde aparecen números negativos- abandonar cualquier idea de interpretación económica de sus elementos. Se preguntará el lector cómo se ha obtenido ***Z***. La respuesta matemática es sencilla: despejando *matricialmente* ***Z*** de ***Y***=***BZ***. La ecuación correspondiente es:

$$\underset{n\times ñ}{Z} = (\underset{nxm}{B^T}\ \underset{mxn}{B})^{-1}\ \underset{nxm}{B^T}\ \underset{mxñ}{Y} \qquad (2)$$

donde, para que exista la inversa de ***B***^{T}***B***, ha de ocurrir que ***m*** sea mayor o igual que ***n***. Claro, cabe preguntarse que, si para calcular ***Z*** necesitamos conocer ***Y***, para qué sirve todo esto. En primer lugar queda claro que la resolución teórica es posible. Además, podríamos analizar una situación de la economía en la que calculáramos el valor de la matriz reasignada ***Y*** del periodo ***t*** a partir de la conocida en el período ***t*-1**. Esta sería una información pertinente en una economía planificada. Resuelto teórica y matemáticamente el primer problema abordamos el segundo: el de los precios del sistema, donde ***Y*** son los productos desdoblados. Esta matriz no es cuadrada sino que suponemos que tiene más filas que columnas, es decir, más bienes que procesos, lo cual se acomodada a la realidad. Pero entonces los grados de libertad de una economía dada por la una ecuación *esrafiana* ***PY***=***wL***+(**1**+***r***)***PX*** sería ***m-ñ***. Para quien busque un equilibrio o considere que el problema económico es buscar un equilibrio de tal forma que los precios sean dadas por la resolución de un sistema de ecuaciones, esta economía de procesos desdoblados es un desastre; para los que consideren que el problema de la economía no es que un modelo matemático sea tal que calcule los precios porque coincidan ecuaciones con variables sino, por ejemplo, que el fin de la economía sea el análisis del excedente, el resultado no representa ningún problema. Es verdad que los valores que puedan tomar los precios en una economía cuyos productos finales ***Y*** tienen ***m-ñ*** más bienes que procesos son infinitos, pero no pueden ser arbitrarios, porque han de cumplir con la ecuación *esrafiana* (o de una ecuación *esrafiana* generalizada con salarios *pre-factum*, por ejemplo, que ya hemos visto). Además, si no quedan determinados los *precios* de los no básicos $\boldsymbol{P}_N$, sí quedan determinados los *valores totales* de cada bien no básico $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N$, lo cual no es una información irrelevante. Sraffa tuvo en cuenta el problema de la igualdad de ecuaciones y precios en el epígrafe 50 de su obra y comentó que "*el número de procesos independientes en el sistema fuera igual al número de mercancías producidas*". Pero este criterio es inaceptable porque sería fruto de una casualidad increíble. Parece que Sraffa trabajó mucho en el tema de la producción conjunta porque no aceptaba –con razón– la simplificación neoclásica de que una empresa, sector o proceso produjera un solo bien. Por mor del realismo, intentó analizar la producción conjunta para decir algo relevante. Quizá en este punto le lastró mucho su desconocimiento del álgebra matricial, quizá su afán por emplear las menos matemáticas posibles, quizá su deseo de ocultarlas en lo posible en la fase expositiva para evitar que su obra pareciera mera economía matemática (caso del modelo de Von Neumann). Finalmente Sraffa, con buen criterio, consideró que el tema de la producción conjunta era una buena introducción al capítulo del capital fijo porque "*la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su propio precios*"[1]. Es verdad que este problema es el que no hemos abordado en los epígrafes anteriores: en ellos veíamos el caso de una mercancía producida por dos o más procesos; este, el de un proceso que produce varias mercancías (máquinas) porque, para cada edad, se considera un producto diferente. Pero esta segunda característica de la producción conjunta tiene en Sraffa una ventaja: hace explícito en sus ecuaciones su formulación matemática. El coste, no obstante, de proceder así es el de su simplificación. Sin embargo no hay en ello problema: todo se puede generalizar sin dejar de ser un modelo explicativo.

Con el sistema patrón y la búsqueda de una mercancía-patrón para la producción conjunta pasa algo parecido con lo anterior. Ya hemos visto las dificultades para construir una mercancía-patrón en la producción conjunta porque no podemos emplear el teorema Perron-Frobenius y eso que partíamos del mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Pues en una economía de procesos desdoblados la posibilidad se esfuma si llegáramos a tener más incógnitas (procesos desdoblados) que ecuaciones (que bienes y servicios).

Las ecuaciones (1) y (2) nos dan de forma generalizada los coeficientes de reasignación para procesos desdoblados, pero existe una forma más simplificada de llegar al desdoblamiento sin conocer *la matriz de reasignaciones*. Veamos. Partimos como siempre de la matriz ***B*** de productos finales:

B = *productos finales*			sumas
55	50	75	180
210	125	115	450
165	185	130	480
140	65	170	375

pero ahora vamos a ensayar con una matriz de reasignaciones ***Z***:

Z = *matriz de reasignaciones*				
	1	2	3	4
1	1,00	0	0	0,00
2	0	1,00	0	0,00
3	0	0	1,00	0,00

Si ahora multiplicáramos la matriz ***B*** por esta ***Z*** de reasignaciones obtendríamos la misma matriz ***B*** puesto que se trata ***Z*** de una matriz diagonal en la submatriz 3x3 a la que se ha añadido una submatriz 3x1 rellena de ceros. Sin embargo, si cambiamos el primer elemento de la diagonal (fila 1, columna 1) por un coeficiente menor 1, pero mayor que cero, a la vez que cambiamos el primer elemento de la submatriz añadida (fila 1, columna 4) por otro coeficiente también mayor que cero y menor que 1, pero

[1] Epígrafe 74 de *PMpM*.

de tal forma que la suma de los dos coeficientes modificados sumen 1, obtenemos una nueva matriz de reasignaciones:

***Z** = matriz de reasignaciones*

	1	2	3	4
1	0,90	0	0	0,10
2	0	1,00	0	0,00
3	0	0	1,00	0,00

Y si ahora hacemos el producto matricial ***B**x**Z*** para obtener la matriz ***Y*** de productos finales reasignados tenemos:

***Y** = **B**x**Z** =productos finales reasignados*

1	2	3	4	sumas
49,50	75,00	50,00	5,50	180,0
189,00	125,00	115,00	21,00	450,0
148,50	185,00	130,00	16,50	480,0
126,00	65,00	170,00	14,00	375,0

Y podemos comprobar cómo las columnas 1 y 4 se han modificado como consecuencia del cambio en los coeficientes de la matriz ***Z*** (en las mismas columnas), mientras que las columnas (procesos) 2 y 3 no han cambiado. Dicho de otra forma, las columnas 1 y 4 son procesos desdoblados correspondientes a la columna 1 (proceso 1) de la matriz original ***B***.

Ahora vamos a generalizar lo anterior y partimos para ello de una *matriz de reasignación* donde se han modificado todos sus coeficientes tal como:

***Z** = matriz de reasignaciones*

	1	2	3	4	5	6	sumas
1	0,90	0	0	0,10	0	0	1,00
2	0	0,75	0	0,00	0,25	0	1,00
3	0	0	0,85	0,00	0	0,15	1,00

Y hecho el producto ***B**x**Z*** obtenemos *la matriz de productos finales reasignados* **Y**, donde vemos que todas las columnas han sido modificadas.

***Y** = **B**x**Z** = matriz de productos finales reasignados*							***B** = productos originales*		
1	2	3	4	5	6		7	8	9
49,50	56,25	42,50	5,50	18,75	7,50		55,00	75,00	50,00
189,00	93,75	97,75	21,00	31,25	17,25		210,00	125,00	115,00
148,50	138,75	110,50	16,50	46,25	19,50		165,00	185,00	130,00
126,00	48,75	144,50	14,00	16,25	25,50		140,00	65,00	170,00

Puede comprobarse en la matriz de arriba que las sumas de las columnas 1 y 4 nos da la 7, la 2 más 5 nos da la 8 y, por último, de las 3 y 6 sale la 9. Y con ello hemos resuelto el problema de cómo resolver uno de los dos problemas de la producción conjunta cual era el de procesos diferentes en los que se obtenían productos idénticos (el caso de la energía eléctrica). Está claro que lo anterior es una simplificación. En primer lugar sólo hemos desdoblado, pero en la producción conjunta puede haber varios (o cientos) de productos idénticos con procesos diferentes. Matemáticamente no habría problema: sólo habría que alargar la matriz de reasignaciones de tal forma que, si el número de procesos originales fuera ***n***, habría que tener una matriz de ***a**x**n*** columnas, siendo ***a*** *el número mayor de las posibles mercancías repetidas*. La segunda simplificación es la de que no hemos contado con los posibles cambios que habría que introducir en los medios de producción para desdoblar estos procesos. Ahí, en efecto, se necesita algo parecido a una función de producción o, simplemente, unos coeficientes fijos a cortos plazo tal y como se hace en el análisis input-output. Entonces, para los medios de producción habría que hacer lo mismo que para los productos finales utilizando, además, la misma matriz de reasignaciones. De momento dejamos el tema aquí que ya es bastante complejo[2].

II – Un proceso, varios bienes

Tratamos aquí el caso contrario del anterior epígrafe. Estamos en el caso de la oveja que produce a la vez leche y lana, pero, en general, es propio de la producción en serie donde una pequeña variación introducida en el proceso productivo produce bienes muy parecidos que se diferencian en pequeños detalles. Pensemos en una fábrica de caramelos cuyos productos se diferencian en el color o en el sabor, en los ladrillos de la construcción que se diferencian en el color. En todo caso es este un caso de producción conjunta con características peculiares que no tenía el caso anterior de un bien (la energía) producida con tecnología e inputs diferentes. En el que ahora nos ocupa se da en el seno de la empresa a diferencia del anterior. Y hay que decir que este caso de producción conjunta no es tal si la gestión de la empresa es capaz de separar contablemente los procesos que producen más de un bien porque, en algún momento, hay que introducir alguna variación para que dé dos productos diferentes en alguna cualidad. En cualquier caso traemos, al igual que el caso anterior, la manera matemática de diferenciar procesos que producen cada uno de ellos varios bienes. Ahora seremos más breves. Partimos de una matriz ***B*** de bienes originales ***n***x***n***, es decir, una matriz de ***n*** bienes (filas) producidas en ***n*** procesos (columnas) y queremos pasar a una matriz ***Y*** que volvemos a llamar de *productos reasignados* que tiene los mismos procesos (columnas), pero ***m*** filas de bienes desdoblados (en este caso particular ***m***=2***n***). La ecuación sería:

(3) $$\boxed{\underset{mxn}{Y} = \underset{mxn}{T}\ \underset{nxn}{B}}$$

Claro está que si conociéramos ambos tipos de productos finales, es decir, los productos originales ***B*** y los reasignados ***Y***, para calcular la matriz ***T*** de reasignaciones sólo habría que despejar matricialmente ***T*** de (3), es decir:

(4) $$\boxed{\underset{mxn}{T} = \underset{mxn}{Y}\ \underset{nxn}{B^{-1}}}$$

siendo B^{-1} la matriz inversa de ***B***. Pero supongamos que no conocemos ***Y***. Análogamente con el caso anterior de producción conjunta, podremos especular sobre el cálculo de la matriz ***Y*** de productos reasignados mediante una matriz del tipo:

	T= *matriz de reasignaciones*		
	1	2	3
1	0,30	0,00	0,00
2	0,00	0,80	0,00
3	0,00	0,00	0,90
4	0,70	0,00	0,00
5	0,00	0,20	0,00
6	0,00	0,00	0,10
	1,00	1,00	1,00

que es una matriz ***m***x***n*** con ***m***=2***n*** compuesta de dos submatrices diagonales, con la pecularиedad de que la suma de los elementos correspondientes a las diagonales suman 1 (o suma por columnas). Vamos a *posmultiplicar* esta matriz por la de productos originales ***B***:

B = *productos finales*			
1	2	3	sumas
55	75	50	180

[2] Y nos trae la crítica de Keynes a Sraffa sobre el supuesto implícito que hacía este último en *PMpM*… sobre la constancia de los rendimientos constantes.

210	125	115	450
165	185	130	480

El resultado es la matriz de bienes desdoblados o *matriz de productos reasignados* ***Y*** (de dos bienes a un proceso). Las filas indican como siempre bienes y las columnas procesos. Puede comprobarse que esta matriz mantiene el mismo número de procesos (columnas) que la matriz anterior ***B*** de productos originales, pero, en cambio, ha duplicado el número de filas (6). El resultado es:

	Y*=matriz de productos reasignados*			
	1	2	3	sumas
1	16,5	22,5	15,0	54,0
2	168,0	100,0	92,0	360,0
3	148,5	166,5	117,0	432,0
4	38,5	52,5	35,0	126,0
5	42,0	25,0	23,0	90,0
6	16,5	18,5	13,0	48,0
7	55,0	75,0	50,0	180,0
8	210,0	125,0	115,0	450,0
9	165,0	185,0	130,0	480,0

La matriz de productos reasignados es la de la parte superior que consta de 3 columnas y 6 filas (las que llevan la numeración de la uno a la seis). Debajo se le ha añadido otra matriz de 3 filas (enumeradas las filas de la siete a la ocho) y 3 columnas, que se construye sumando los elementos 1 y 4 de cada columna para darnos los elementos de la fila 7, la suma de los elementos 2 y 5 para obtener los de la 8 y, por último, sumamos los de la 3 y la 6 para ubicar su suma en la fila 9. Así se puede comprobar que 16,5 (fila 1, columna 1) más 38,5 (fila 4, columna 1) da como resultado 55 (fila 7, columna 1). Puede comprobarse que la submatriz compuesta por las séptima, octava y novena filas (con sus tres columnas) es la matriz de productos originales ***B***. Y también comprobar que si, en este caso conociéramos la matriz ***Y*** de reasignaciones (la ***B*** de productos originales se da por hecho que siempre se conoce), podríamos calcular la matriz ***T*** de reasignaciones ya vista mediante la *pos-multiplicación* de la matriz ***Y*** por la inversa de ***B*** de acuerdo con la ecuación (4). Damos aquí esta inversa:

inversa de ***B***		
-0,4786	-0,0476	0,2262
-0,7929	-0,1048	0,3976
1,7357	0,2095	-0,8452

Supongamos que nos imponemos ahora a la tarea de calcular una matriz resultante ***Y*** a partir de la matriz original ***B*** de productos con el fin de calcular a su vez los precios o el excedente en la producción conjunta. Tendríamos la siguiente matriz:

(5) $$\boxed{\underset{m\times\tilde{n}}{Y} = \underset{m\times n}{T}\;\underset{n\times n}{B}\;\underset{n\times\tilde{n}}{Z}}$$

donde se cumpliera que ***m***>***n*** y ***ñ***>***n***. En el caso de que ***m***=***n***=***ñ*** tendríamos el caso que propone Sraffa de que el número de procesos duplicados por cada mercancía se compensara con el numero de bienes duplicados por cada proceso, y con ello una matriz cuadrada ***Y*** de productos finales. Sraffa pensaba que con eso se resolvía la cuestión. La realidad es que no es cierto porque tanto ***T*** como ***Z*** son matrices producto de combinaciones lineales de las matrices ***Y*** y ***B***. Han de manipularse con cuidado porque sólo está permitido calcular las inversas de los productos ZZ^T y de TT^T dado que hay que suponer que ***m***>***n*** y ***ñ***>***n*** para estar en la producción conjunta. Además hay un problema más grave que ahora comentamos.

Ya hemos visto cómo partir de las matrices diagonales duplicadas ***T*** y ***Z*** para dar con la matriz ***Y*** de *productos reasignados* cada una por separado. Ahora simplemente vamos a juntar las piezas expuestas en los dos epígrafes anteriores. Sin embargo, si quisiéramos calcular las matrices de coeficientes de reasignación ***T*** y ***Z*** mediante las ecuaciones (2) y (4) no podríamos porque el número de ecuaciones ***m*** es menor que el número de incógnitas (**2*m***, con ***m*** incógnitas independientes de ***T*** y otras tantas de ***Z***). Nos queda el procedimiento de las matrices diagonales duplicadas que ya hemos visto. En efecto, si partimos de la matriz de productos finales originales ***B***:

B = *productos finales*			
1	2	3	sumas
55	75	50	180
210	125	115	450
165	185	130	480

Y la *pre-multiplicamos* por la matriz ***T*** de reasignaciones para el caso de un bien dos procesos y, simultáneamente, la *pos-multiplicamos* por la matriz ***T*** de reasignaciones para el caso de un proceso dos bienes y obtenemos la *matriz final reasignada* ***Y***:

Y = *matriz final reasignada para ambos casos*

	1	2	3	4	5	6	sumas
1	14,85	16,88	10,50	1,65	5,63	4,50	54,00
2	151,20	75,00	64,40	16,80	25,00	27,60	360,00
3	133,65	124,88	81,90	14,85	41,63	35,10	432,00
4	34,65	39,38	24,50	3,85	13,13	10,50	126,00
5	37,80	18,75	16,10	4,20	6,25	6,90	90,00
6	14,85	13,88	9,10	1,65	4,63	3,90	48,00

donde comprobamos que si sumamos las filas 1 y 4 por un lado, la 2 y 5 por otro, y, por último, la 3 y 6 por el suyo, sale la matriz:

	1	2	3	4	5	6	
1	49,50	56,25	35,00	5,50	18,75	15,00	180,00
2	189,00	93,75	80,50	21,00	31,25	34,50	450,00
3	148,50	138,75	91,00	16,50	46,25	39,00	480,00

De la cual, si sumamos las columnas 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6 respectivamente se obtiene:

B = matriz original

	1	2	3
1	55,00	75,00	50,00
2	210,00	125,00	115,00
3	165,00	185,00	130,00

que es, en efecto, la matriz original de productos finales de la que partíamos. Con *la matriz final reasignada* ***Y*** hemos resuelto una parte matemática del problema de Sraffa en la producción conjunta, pero hemos creado otro inevitable. En efecto, esta matriz ***Y*** final no es invertible dado que se ha creado como combinaciones lineales de la matriz original ***B***, siendo las ponderaciones de la suma de productos de filas y columnas las matrices de reasignación ***T*** y ***Z***. Si ahora partiéramos de la matriz ***Y*** *final* mediante la ecuación de definición del sistema de Sraffa:

(6) $$PY = wL + (1+r)PX$$

no podríamos despejar los precios ***P*** porque ***Y*** lógicamente no es invertible[3] y, consecuentemente, tampoco lo es la ecuación:

[3] Para comprobarlo no hay más que calcular el determinante de la matriz **Y** final de reasignaciones.

(7) $$P = wLY^{-1}\left[I_d - (1+r)A\right]^{-1}$$

donde $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. Y aquí tenemos la inversa de $\boldsymbol{Y}$. Si el objetivo fuera sólo la determinación de los precios de forma determinística el resultado sería un desastre. Pero sabemos que el núcleo duro de intereses de Sraffa y de su modelo es el excedente y su distribución. Podemos concluir que la producción conjunta da infinitos grados de libertad a la gestión de la empresa y al conjunto del sistema en relación a los precios si en la economía en su conjunto prevalece este tipo de producción en sus dos modalidades, incluso con tasas unitarias de ganancia. Esta es una posible explicación del por qué la producción conjunta está generalizada. Sin embargo, cuando queremos pasar del modelo de Sraffa al mundo real hay que tener cuidado al menos en dos aspectos: 1) Sraffa parte de un sistema de equilibrio en precios donde las variables a determinar se resuelven por el conjunto de relaciones del sistema y no por meras decisiones empresariales. Este es quizá el mayor problema del modelo de Sraffa y de todo modelo de equilibrio (o con desequilibrio) general. Hay una especie de hiato entre las formas de resolución del sistema tratado globalmente y las decisiones de las empresas, que son decisiones descentralizadas basadas sólo en el interés propio. En la producción conjunta se pone evidencia como en ningún otro capítulo de la obra de Sraffa este hecho, pero a la vez es el que da los grados de libertad en la toma de decisiones para sí evitar caer en un modelo deteminístico como ocurre con los modelos de equilibrio general de origen *walrasiano*; 2) Una parte de la responsabilidad de precios negativos en la producción conjunta es la de que sólo exista una tasa de ganancia. Pero esto es subsanable generalizando el modelo a $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia. No es la única causa de posibles precios negativos porque otra –pero tampoco definitiva– es la de la productividad o viabilidad del sistema que se concreta en que $\boldsymbol{Y}>=\boldsymbol{X}$. Sin embargo la libertad de los empresarios no es total según el modelo de Sraffa porque la tasa de ganancia de las empresas no puede traspasar la tasa máxima, tasa que hemos demostrado no depende de las variables monetarias. Esa tasa máxima impone un límite a la apropiación del excedente por parte de las empresas o rentas no salariales. En el caso de la producción simple esa tasa de ganancia máxima es la razón-patrón; 3) Otra causa de posibles precios negativos es la bondad del sistema de Sraffa que supone tener en cuenta el conjunto. En efecto, en este modelo como en los modelo input-ouput que tienen en cuenta las relaciones intersectoriales o interindustriales, son precisamente estas múltiples conexiones las que pueden producir precios negativos (sólo en la producción conjunta) porque lo que importa no es sólo la relación directa entre trabajo y medios de producción (capital en la jerga neoclásica), sino todas las indirectas al utilizar como medios de unos procesos los productos finales de otros. En estas conexiones se ha de trabajar con tasas de ganancia tales que pueden hacerla incompatibles los excedentes relativos de una mercancía (hoy diríamos bien o servicio) con la tasa de ganancia del sistema[4], como ocurre en el caso de las habas de Sraffa en su famoso apéndice B.

Madrid, 29 de septiembre de 2014.

Bibliografía

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Sraffa y von Neumann" (2000, edición italiana; 2008, en español).

Peris i Ferrando, J.E: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Schefold, Bertram: "Mr. Sraffa on Joint Production and other essays", edit. Routlegde, 1989

Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means of commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

[4] Que si se logra hacer explícito la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, esta tasa de ganancia se determina en la parte de la economía de bienes básicos, siendo los sectores (o procesos) productores de bienes no básicos aceptantes pasivos de esta tasa de ganancia.